VITTORIO EM. III

VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

6·D·37

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXX

Palchetto

Num.° d' ordine 42

NAZIONALE
B. Prov.
I
513
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

B. P
I
513

C0GG80 SBN

LEZIONI ELEMENTARI

DI ARITMETICA

PROPRIAMENTE DIMOSTRATIVA

DEL SACERDOTE

PAOLO ROMEO DA SIDERNO

REGIO PROFESSORE ec. ec.

La Filosofia è scritta nel libro grandissimo della natura, e i caratteri suoi sono triangoli e numeri.

GALILEO GALILEI *nel Saggiatore.*

NAPOLI

STAMPERIA E CARTIERE DEL FIBRENO

Strada Trinità Maggiore N.° 26

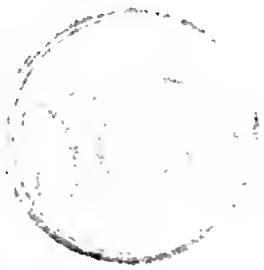
1842

Digitized by Google

Digitized by Google

ALL' INGENUO E STUDIOSISSIMO GIOVANE

SIGNOR ADOLFO SICARD.



ADOLFO MIO.

Nissuno meglio di voi conosce quanta ripugnanza io sempre avessi avuta, anche alle vostre reiterate premure, di mettere a stampa le Lezioni di Aritmetica, che, sono ormai più anni, così come venivano, scriveva ogni giorno a bella posta per voi. Contento non solamente io, ma sempre contentissimi di voi, tutti i vostri, fino al segno di ammirarvi per la buona riuscita che facevate in ogni sorta di conoscenze, alle quali volgevate la mente: parevami ostentazione la vanità delle stampe; sempre e quando indistintamente ogni teorica di numeri veniva ad essere nella mente vostra fortemente stampata ed impressa. Sicchè dolce cosa sarà sempre per me il rammentare, quanta gioia appariva sul volto dell' ottimo vostro signor padre; non solo quando voi in tedesco, in francese, in inglese, in latino, in castigato sermone italiano sostenevate lunghissimi dialoghi, intendevate ogni sorta di libri, rispondevate ad ogni genere di scritture: ma anche quando con l' Aritmetica e con l'Algebra davate realità a molte quistioni di Geografia, e di scienze Fisico-Matematiche, alle quali attendevate per quanto poca poteva essere l' opera mia. Anzi non poche volte la vostra espertezza nel calcolare era anche di ammirazione all' unico fratello vostro, rapito anch' egli alla fama ed alla universale stima nell' aprile degli anni suoi; il quale pari in ingegno aver poteva, maggiori certamente non mai.

Sicchè nel restituirvi dall' estero, ove nel cuor de' buoni è

rimasto forte desiderio di voi, e nel ricominciare gli studi filosofici con quell' ardor medesimo col quale avevate compito le Matematiche, mi avete proposto o di stampare io, o di stampar voi in mio nome queste non so quali Lezioni di Aritmetica, che come conviene a giovane studioso tenevate ancora fedelmente presso di voi. E siccome voi mi siete caro per ogni verso, e caro siete a tutti quelli che hanno la sorte di conoscervi; e per quello de' costumi, che in voi non possono essere più modesti ed umani; e per quello dell' ingegno, che non potevate sortirlo più penetrante e solerte; e per quello della fortuna, che nella primavera degli anni vostri all' ottimo padre vi ha tolto, e al fratello *unico* per tutt' i riguardi: così a solo oggetto di far cosa grata a voi, metto a stampa queste primissime mie Lezioni di Aritmetica; se non tali, quali voi me le avete restituite, poco pochissimo differenti da quelle in quanto a leggiere varianze di metodo, e di brevità. Accettate dunque non già un opuscolo, che per più riguardi potrebbe dirsi vostro; ma soltanto la stima e l' amicizia che sempre mi dureranno per voi, e per le vostre rare virtù. Addio.

Napoli 16 *Luglio* 1842.

Affez.mo precettore e vero amico

PAOLO ROMEO

LEZIONE PRIMA.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. *Quantita' e sue diverse specie.* Niuno è che ignora spettare alle Matematiche l'esame della *grandezza*, ovvero *quantità:* non tutti però convengono nel rettamente definire la quantità. E questo a senso degli Enciclopedisti (1) deriva « forse dall'esser l'idea che questa parola rinchiude, più semplice che le idee per mezzo delle quali possiamo intraprendere a spiegarla ». Taluni definiscono la quantità « ciò che è capace di aumento o diminuzione ». Ma in questo senso le quantità infinite non dovrebbero tenersi in conto di quantità, in quanto che sarebbero incapaci di aumento: Lo zero poi dovrebbe essere tenuto in conto di quantità, in quanto che sarebbe capace di ogni aumento. Queste ragioni, che sembrano soddisfacentissime hanno indotto i sudetti Enciclopedisti definire la quantità « tutto ciò che è composto di parti ». Tali sarebbero le linee, le superficie, le velocità, i solidi. Non dimentichiamo che tante volte le idee semplici meglio si percepiscono negli oggetti, che nell' opera di Logiche definizioni.

La grandezza dividesi primieramente in *astratta*, e *concreta:* la prima è quella che per via di analisi (separazione) strappiamo, per così dire, dal soggetto ove percepiscesi: la seconda è quella che concepiamo come inerente al soggetto, ove la percepiamo. Del primo genere sarebbero le linee ec.: del secondo il moto, la velocità ec.

Or tanto l'una, quanto l'altra, o le percepiamo divise in parti, o le consideriamo come divisibili in parti; la prima dicesi grandezza *discreta;* la seconda grandezza *continua:* la prima rappresentasi con numeri: la seconda con linee, superficie, e solidi.

2. *Scienze Matematiche.* Dicesi generalmente Scienza « una serie di deduzioni procedente da intuitivi principî, e adoperata alla distinta conoscenza di qualche oggetto ». Si dicono poi particolarmente scienze Matematiche « tutte quelle che movendosi da principî intuitivi trattano di grandezze in quanto che sono cal-

(1) Dizionario Enciclopedico di Lalande art. *Quantità.*

colabili ». Ed è la voce *Matematiche* di greca origine, *apprendere*: perchè le Matematiche « si possono considerare come la scienza per eccellenza tra le scienze naturali »: tal'è l'avviso de'signori Bossut, e Lalande nel citato Dizionario Art. Matematiche.

Le Matematiche dunque dividonsi in *pure* e *miste*, ovvero applicate. Le Matematiche *pure* abbracciano l'Aritmetica e la Geometria con tutte le loro suddivisioni. Elle si dicono *pure*, perchè trattano della grandezza indipendentemente dagli oggetti ai quali siamo usi riferirla.

Quando poi di queste conoscenze *pure* adoperasi per iscovrire la natura di particolari oggetti, diconsi Matematiche applicate, ovvero *miste*: e tali sarebbero l' Astronomia che occupasi de' corpi celesti, la Meccanica che occupasi de' corpi in moto: la Geografia, la Cronologia, l' Architettura militare, l' Idrostatica, l'Idrodinamica, l' Idrografia, e mille altre, che sarebbe difficile numerare.

3. *Aritmetica*. L' *Aritmetica* è una scienza, che tratta de' numeri, ovvero della quantità discreta. « Come scienza dunque ella non deve mancare di principî, e di tutto quel rigore illativo, ch'è richiesto nelle dimostrazioni *pure*. Molti sapienti mentre convengono esser l'Aritmetica » la base di tutte le scienze Matematiche; perchè i rapporti di tutte le specie di quantità si riducono finalmente in numeri (1); si sono posti al sicuro or definendola *arte*, ora *scienza*; Ella è arte nella mente di chi praticamente numera; ella è scienza nella mente di chi di ogni operazione numerica rende strettissimo conto. Perchè scienza dunque deve avere il suo speciale linguaggio, i suoi particolari fatti, le sue deduzioni.

4. *Unità* e *numero*. L'unità del Matematico, se è permesso dirlo, non è l'unità dell' Ideologo. E questo già non significa che il genere ultimo di unità non sia comune all'uno e all'altro; vuolsi intendere con ciò, che gli oggetti da'quali il Matematico formasi l'idea di unità, sono ben diversi da quello, d'onde l' Ideologo cacciasi anche l'idea della propria unità. Il Matematico si forma l'idea di unità da ogni oggetto considerato indiviso in sè stesso, e separato e diviso da ogni altro. Egli chiama uno in sè per esempio, il Cavallo, l'ora, il giorno. Il concetto generico di questi esseri indivisi in loro stessi chiama *unità*, gli oggetti adunque esistono in natura; l'unità poi è concetto di nostra mente. Da qual sentimento poi l'Ideologo si formasse l'idea della *unità* propriamente detta, è da Metafisici in luogo opportuno debitamente sviluppato. Quando poi per atto di mente ad una aggiungesi un'altra unità, e così di seguito, generasi l' idea di *numero*. Il numero dunque è opera di nostra mente; e le cifre che noi in-

(1) Diz. Cit. art. Arit.

debitamente chiamiamo numeri, non sono già in sè stessi realità, ma complessi di cose reali. Così a modo d'esempio, quando dico cinque uomini, non già che esiste un numero reale che uguaglia cinque uomini, ma la sintesi di 1 + 1 + 1 + 1 + 1 mi produce certa idea che io chiamo numero. Newton definisce il numero « rapporto astratto di una quantità ad un altra della medesima specie, che si prende per unità ». E divide i numeri in *interi*, *rotti*, e *incommensurabili* (1). I numeri dunque sono in se stessi determinati, ma diconsi indeterminati nella specie: perchè con 5 p. e. si possono rappresentare 5 giorni, 5 ducati, 5 canne.

5. *Idea e valore di ogni cifra*. Le cifre numeriche sono le seguenti:

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, zero.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

Esse sono altrimenti dette cifre arabe; perchè dagli Arabi furono tra di noi introdotte da Gilberto, poi col nome di papa Silvestro II. Il zero è soltanto adoperato per significare le mancanze di certe cifre. Bisogna che un giovinetto formisi una giusta idea del zero, e del valor di ogni cifra; in quanto che con esse oltre di dinotare ciò che rappresentano, arriveremo a rappresentare tutte le quantità. E quantunque Veigelio insegnava potersi numerare senza oltrepassare la cifra 4; e Leibnizio si era spinto più oltre; che fidavasi computare colle due sole 1 e 0 (2): Noi omettendo questi curiosi e non utili trovati di calcolare, adotteremo i metodi comuni e adoperati dall'Universale.

Ogni numero dunque ha un valore assoluto, e un altro relativo, cioè vale sempre quel numero di unità che rappresenta, ma dalla diversità del luogo prende un altro valore. Così il 7 per esempio val sempre 7; ma relativamente al luogo ove giace in una serie, or vale 7 unità, or vale 7 migliaia, or 7 milioni ec. Senza quest'altro valore di *sito* l'Aritmetica non sarebbe stata quella scienza, ch'è. Tutto il merito dell'invenzione, dicono i Signori di sopra citati, consiste nell'idea avuta di variare il valore di una cifra, ponendola in siti differenti; e d'inventare il carattere 0, che trovandosi dopo una cifra, ne aumenta il valore di una decina.

Ogni numero dunque procedendo da destra a sinistra cresce per decine. Stabilito convenzionalmente che nel primo numero situato sulla dritta giacessero le unità; il secondo rappresenta decine; il terzo decine del secondo, ovvero centinaia del primo; il quarto decine del terzo, centinaia del secondo, migliaia del pri-

(1) Dizionario Encicl. art. Numero.
(2) Dizionario Encicl. art. Numerazione.

mo: In generale ogni cifra è il decuplo del valore spettante alla cifra antecedente. Chi non vuole mancare di conoscenze esatte, è asssolutamente necessario che approfondisca la derivazione di siffatte idee. E non dimenticate che nel profferire il valore di siffatti numeri sempre debbe procedersi da destra a sinistra di chi legge.

6. *Metodo facile per leggere i numeri.* Ove un giovinetto fosse bene istruito di ciò che rappresentano le cifre numeriche, e che esse hanno altro valore, che rappresentano per ragion del luogo ove giacciono in una serie qualunque: niente è più facile, quanto leggere ogni serie di numeri orizzontalmente situati. E siccome abbiamo detto che la prima cifra sulla dritta rappresenta unità semplici, la seconda decine, la terza centinaia, la quarta migliaia, la quinta decine di migliaia, la sesta centinaia di migliaia, la settima unità di milioni: Se si continua l'esame sul valore della ottava, nona, decima cifra, ec., si dovrà reiterare la medesima denominazione di vocaboli, ma la denominazione sarà di milioni. E lo stesso avverrà dalla tredicesima alla diciottesima inclusivamente, dalla diciannovesima alla ventiquattresima, e così di seguito.

Quindi niente più facile, quanto leggere e valutare una serie di numeri lunghissima che fosse. « Essa spartiscasi in sezioni di tre cifre ognuna con intermedie virgolette procedendo da destra a sinistra. Sulla settima cifra, sulla decimaterza, sulla decimanona, sulla vigesimaquinta si mettano successivamente le caratteristiche 1, 2, 3, 4 ec.

Nel leggere poi da sinistra a destra le virgole semplici alterneranno colle caratteristiche. Ove sarà la sola virgola, si pronunzierà la voce *mila;* ove la caratteristica, si pronunzierà la voce milioni, accomodandola alla caratteristica. Così per esempio

$78,20\overset{2}{3},045,8\overset{1}{2}9,783,458$ si pronunzia « settantottomila, dugento tre bilioni, quarantacinque mila, ottocento ventinove milioni, settecento ottantatre mila, quattrocento cinquantotto ». Gli zeri, come si è detto, servono ad empire le mancanze de' numeri intermedii ad altri numeri dati.

7. *Scrivere ogni sorta di numeri.* Quanto è facile però anche a principianti valutare e profferire qualunque serie: altrettanto poi è difficile anche a taluni adulti, dal numero passare all'espressione; dell'idea al segno. E questo non si potrà mai ottenere come alla scienza conviene, se i giovani non si abituino a sapere il luogo che debbono nella serie prendere i numeri in quanto al loro valore. Io nel corso delle mie lezioni ho trovato conducentissimo esercitate i giovani a prefiggersi p. e. che le migliaia corrispondono al quarto luogo della serie che debbono esprimere, i milioni alla settima cifra, e così andate voi discorrendo. Esortandoli ad avvertire che quando da una si salta ad altre unità, i vôti inter-

medî bisogna che vengano empiti col zero. Così p. e. se è loro dato scrivere diciassette milioni, ottocento tremila, quattrocento due: essi debbono immediatamente pensare che la serie sarà di otto cifre, e in conseguenza le due prime sono 17, ove deve aver luogo la caratteristica 1 per la voce *milioni* pronunciata: in secondo luogo, che ad esse debbono succedere tre altre 803, perchè dall'ottocento si è saltato al tre, lasciando vuote le decine: finalmente che le ultime debbono essere 402 perchè anche dal quattrocento si è saltato alle due unità rimanendo scoverte le decine. Ove siano così abituati i giovanetti, dopo il corso di qualche giorno giungeranno ad esprimere co'numeri convenevolmente ogni serie che sarà loro proposta. E non ci sgomenterà lo scandaloso esempio di vedere i giovani bravare nelle cose geometriche, inesperti poi scrivere e rettamente valutare i numeri in serie.

8. *Principali operazioni di Aritmetica.* Niuno ignora ridursi a quattro le precipue operazioni di Aritmetica, Somma, Sottrazione, Multiplicazione, e Divisione. Diciamo precipue, non perchè elle sono le prime nell'ordine cronologico: ma perchè tutto l'artifizio di questa scienza consiste in unir insieme numeri separati, separare numeri uniti: determinar prodotti di numeri dati; e trovare parti secondo data ragion di numeri. La Multiplicazione però considerasi come una somma abbreviata: non altrimenti che la Divisione è tenuta in conto di brevissima sottrazione. Tutto dunque in Aritmetica consiste in aggiungere e in diminuire. A proposito, pensa il signor Laromiguiere. P. 1. L. 1.

9. *Fatti primi dell' Aritmetica.* Non vi è scienza senza fatti e principî. I fatti necessari alla scienza de' numeri sono quelli che diconsi *postulati*, cioè così facili, che non dimandasi intorno a essi ragione. Tali sarebbero, sommare i numeri semplici, cioè che non oltrepassano il nove, sottrarre da un numero semplice maggiore un numero minore; multiplicar due numeri semplici; dividere uno per un altro. Non s' incontra alcuna difficoltà sulla somma e sulla sottrazione, i principianti trovano qualche difficoltà nella multiplicazione, e nella divisione. Quindi proponiamo loro di abituarsi a ripetere la così detta tavola Pitagorica a memoria. Ella conterrà tutt' i prodotti di ciascuna parte delle nove unità semplici per ciascuna delle medesime parti: e i prodotti sono situati separatamente, come si vede fatto nella seguente

TAVOLA PITAGORICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

10. *Spiegazione della Tavola.* Ciascun numero della serie verticale multiplicato per ciascuno altro della serie Orizzontale dânno i rispettivi prodotti. Della stessa tavola, adoperasi per abituare i giovani a divisioni di non difficile riuscita. Se p. e. il prodotto 72 lo dividete per 8 vi dà per quoto 9. Ed ecco come: si cercherà il dividendo 72 nella tavola, e prendendo il divisore 8 nella prima casella della parte verticale che contiene 72 si troverà il quoziente 9 nella prima casella dalla parte orizzontale che contiene anche 72.

11. *Assiomi dell' Aritmetica.* Non è poi scienza, se non ha prime verità; cioè verità tali che percepite per atto d'intuizione, sono il canone supremo di ogni dimostrazione, il punto donde muovesi l' umana mente per ragionare. Or queste tali verità sono dette altrimenti assiomi. Sicchè l' assioma è indimostrabile. E perciò il D' Alambert nell' opera *Mélanges de Littérature tom. IV. pag. 26 così scrive di Volfio*, che ardì levare dimostrazione di un assioma: « Un Mathématicien moderne, célèbre de son vivant en Allemagne comme Philosophe, commence ses Élémens

de Géométrie par ce théorême, que la partie est plus petite que le tout, et le prouve par un raisonnement si obscur qu'il ne tiendroit qu'au Lecteur d'en douter.

Or di due soli assiomi fa d'uopo in Aritmetica: uno per dare ragione de' numeri che si sommano in un solo: l'altro poi per dare ragione de' numeri che si sottraggono da altri, rimanendovi certi determinati residui. E diciamo due assiomi, non uno: perchè sebbene tutti convengono in un tipo solo, pure le formole sono diverse; e diciamo due e non dieci, perchè a due soli pensiamo potersi ridurre tutt'i principî assiomatici dell'Aritmetica: in quanto che o si somma o si sottrae, si aggiunge o si diminuisce, come dicevamo di sopra. Il 1.° è: *Il tutto è uguale alle parti prese insieme.* Il 2.° *Se da grandezze uguali tolgonsi cose uguali, i residui sono anche uguali.*

12. *Teorema, e Problema.* Delle dodici forme alle quali riducensi tutte le proposizioni, il Matematico ha separato due soltanto: le problematiche, e le ipotetiche: problema, e teorema. L'Aritmetico sovente si contentò di una sola, e ridusse tutto a Problema. Se non che tante volte per aprirsi la strada a qualche verità ha premesso certa altra verità fondamentale, la quale dimostrata chiamò Lemma. Sempre che dunque è data una cosa come nota, e dimandasi un'altra che è ignota, siffatta forma di proposizione dicesi *problema:* quando poi ammettesi un'ipotesi, e deducesi una conseguenza, quest'altra forma dicesi *teorema.* E l'una e l'altra tengono nella loro forma esteriore l'enunciazione astratta, l'enunciazione applicata, la soluzione o costruzione, la dimostrazione, e la conseguenza.

A queste due specie di proposizioni matematiche solevano aggiungersi lo Scolio, il Corollario, il Lemma; e non erano altro che una delle surriferite forme, o brevemente spiegata, o immediatamente dedotta da qualche verità antecedente, o premessa a qualche verità conseguente.

13. *Dimostrazione, e sua necessità.* In tutte però dev'esservi dimostrazione, cioè evidenza per raziocinio. Ricordiamoci un bel detto italiano che « il dedurre questo di questo per quello è nella mente umana per raziocinio ». E bisogna che nelle matematiche sia con molto impegno custodito e vendicato il pregio di *dimostrazione:* il quale bandito da certe scienze, cercherebbesi anche dalle matematiche bandire. Sicchè così de' tempi suoi scriveva il massimo Vico nell'antichissima Sapienza degl'italiani « si sono ultimamente di nuovo sconvolti gli ordini, e si è occupato dal *probabile* il luogo del *vero.* Si è invilito questo nome di dimostrazione, trasportandosi ad ogni ragione, non che probabile, bene spesso apparente. E come avvenne nei titoli, che quel di Signore, che fu rifiutato come troppo superbo da Tiberio, usandosi poi darsi ad ogni vilissimo uomo ci ha fatto perdere la grave idea di

cotal voce, così il vocabolo di dimostrazione dato a probabili e talora apertamente false ragioni, ci ha profanato la venerazione della verità ».

14. *Due specie di dimostrazione.* E giacchè debbesi parlar di dimostrazione, è necessario spartirla in *diretta* e *indiretta.* In quella a un primo vero sostituendo un altro, e così di seguito, trovasi finalmente ciò che la cosa è: in questa poi supponendo una cosa falsa in sè stessa, si ha per conseguenza un assurdo, una contradizione; la quale derivando legittimamente dal principio stabilito, fa ricostruire il pensiero, e perciò togliesi come falso il principio, perchè ha menato a paradossa conseguenza. Ma di tutto questo ampiamente nelle nostre opere di filosofia razionale.

13. Intanto per brevità di calcolo sovente faremo uso de' segni che seguono cioè = eguale: + più, — meno, ×, (.) multiplicazione, (:) divisione, > maggiore, < minore, e simili.

E sovente pure invece degli oggetti delle nostre operazioni ci serviremo delle lettere iniziali. Per esempio. T. tempo: S. Spazio: C. Cerchio: S. Sfera: P. Piramide ec.

LEZIONE II.

1.° Problema: *Sommare gl' interi che si riferiscono ad una medesima unità.* = 1.° Bisogna scrivere i numeri dati in modo che le unità, decine, centinaia, ec. di ciascuna serie, giacciano le une in corrispondenza delle altre; 2.° trovare la somma delle unità e scriverla anche in corrispondenza, se non eccede le decine; che se eccede tal numero, bisogna scrivere il solo avanzo sulle decine, e queste poi aggiungere al numero che immediatamente segue. 3.° Così procedendo fino alle ultime cifre situate sulla sinistra, si avrà la somma de' numeri proposti. Siano da sommarsi le quattro partite. A. B. C. D.

A. = 789045
B. = 97809
C. = 5897
D. = 9
T. . . 892760

Dimostrazione.

La somma trovata contiene in sè, secondo quello che si è fatto, le unità de' numeri dati, le loro decine, le loro centinaia: cioè essa è un tutto che contiene le parti date. Dunque ec.

E per dare prôva tanto più certa, quanto che è intuitiva: sommate separatamente le unità, le decine, ec. delle parti date.

Le unità sono.	30
Le decine.	13
Le centinaia.	16
Le migliaia.	21
Le decine di migliaia.	17
Le centinaia di migliaia.	7
Somma.	892760

Pertanto dunque sotto le linee si notano gli avanzi sulle decine, per abbreviare l'operazione; ma la somma bene analizzata è quale l'abbiamo noi riportata in quest'ultimo esempio.

2. Problema. *Da un numero maggiore, sottrarre un numero minore, purchè sieno della medesima specie.* 1.° Anche in questo problema alle unità, decine, centinaia ec. del numero maggiore, che chiamiamo *minuendo*, si scrivano in corrispondenza le unità, le decine, le centinaia del numero minore, che chiamiamo *sottraente*. 2.° Se le cifre del numero maggiore sono individualmente maggiori delle corrispondenti cifre del numero minore, l'eccesso o il *residuo* facilmente si ottiene. 3.° Ma se tutto il minuendo è maggiore del sottraente; ma intanto alcune cifre del numero maggiore sono individualmente minori delle cifre corrispondenti nel numero minore: in tal caso bisogna aumentare ognuna, prendendo una unità dalla cifra, che immediatamente segue, e risolverla in altrettante, quante sono quelle del luogo in cui deve farsi la sottrazione. 4.° In tal caso bisogna che il numero che segue si concepisca diminuito di quella sola unità, che si è presa per eseguire la sottrazione; ovvero quello che immediatamente segue nel sottraente debbe intendersi aumentato di una unità. 5.° E così facendo fino all'ultima cifra; si otterrà il numero che dinota di quanto il maggiore eccede sul minore, e questo numero dicesi altrimenti *residuo*. Sia per esempio dal n.°

	M =	7080004
	m =	5697589
Sarà il numero.	R.	1382415

Dimostrazione.

Dalle unità del numero superiore si sono tolte le unità del n.° inferiore. E perchè il numero parziale 4. era minore del parziale 9; mentre tutto il minuendo è maggiore del sottraente, si è presa una unità del n.° 8, ch'è il numero che prossimamente

segue, il quale essendo 8, decine di migliaia, si è sostituito dalle parti 7999 + 1 decina, la quale convertita in unità, e aggiunta alla 4. ha dato 14. del quale numero sottratto 9, si è avuto 5. per residuo. Così ragionando sull'eccesso delle decine ec. si è avuto il totale residuo del minuendo sul sottraente.

Affinchè i giovanetti percepiscano chiaramente in questa operazione: metto qui appresso a fronte e l'operazione già fatta, e l'altra che nella sottrazione si fa per forza di mente, e alla quale i giovani non abbadano.

Operazione data.		Operazione mentale identica.	
M. =	7,080,004	M. =	6 + 9 + 17 + 9 + 9 + 9 + 14
m. =	5,697,589	m. =	5, 6, 9, 7, 5, 8, 9
R.	1,382,415	R.	1, 3, 8, 2, 4, 1, 5

Quindi M. = M. m = m Ed R. = R.

3.° Problema. *Provare la somma.* 1.° Dalle serie de' numeri, dati per sommare, si tolga una qualunque. 2.° E si trovi una seconda somma delle serie rimanenti. 3.° Dalla prima si sottragga questa nuova somma. 4.° Dalla identità che osservasi tra il residuo e la serie separata, si può avere sufficiente criterio di una somma rettamente eseguita

Sieno A. = 78345
B. = 90874
C. = 54237
D. = 97582
S. = 321038

Sommati.

A. B. C. Sarà s = 223456

E facendo la sottrazione di s da S, sarà R. = 97582

Dimostrazione.

La prima somma è composta dalle parti A. B. C. D. La seconda è composta dalle parti A. B. C. Dunque se non si è fatto errore, il residuo della prima sulla seconda somma dev' essere D; cioè la serie separata.

4.° *Osservazione.* Giova però tenere avvertiti i giovanetti, che queste prôve non sono sempre criterio d'*infallibilità*. Difatti dato luogo ad un errore nella prima somma, può un secondo errore o nella seconda somma, o nella sottrazione emendare il primo er-

rore: e intanto dopo due errori tenere come retta ed esatta l'operazione. Queste regole diminuiscono la probabilità di errare; ma non già sono criterio infallibile di rette operazioni. Di fatti sieno date, A, B, C.

	A. = 783
	B. = 942
	C. = 123
Io penso che la somma	S. = 1849
Separando due serie, sarà	s = 1725
E fatta la sottrazione concluderò che	R. = 123

Doppio errore perchè nel sommare le unità ho avuto l'erroneo numero 9, e dopo da 9 sottratto 5 ho pensato che il residuo era 3. Si dirà forse che ho rettamente operato dopo due errori?

5.° Problema. *Provare la sottrazione.* Si sommi il residuo col sottraente. Dalla identità che vedesi tra questa somma, e il minuendo dato, si potrà dedurre la legittimità della sottrazione.

Sia dato	M. = 7098
	m. = 5999
	R. = 1099
	S. = 7098

Vede ognuno essere M = S: cioè il numero maggiore dato, essere uguale alla somma del minore, e del residuo.

Dimostrazione.

Se il residuo è l'eccesso del maggiore sul minore; chiaramente comprendesi che il minore sommato col residuo dà per somma il numero maggiore. Quindi se M — m = R. Sarà poi R + m = M.

6.° *Osservazione.* Anche qui cade opportuno l'avvertimento dato a n.° 4. di questa lezione: nè pensiamo doversi mai dimenticare in tutte quelle che diconsi prôve della rettitudine di talune operazioni Aritmetiche.

LEZIONE III.

1.° Problema. *Multiplicare due numeri interi.* 1. I numeri che si debbono tra loro multiplicare, e che diconsi propriamente *fattori*, si scrivano uno sotto l'altro, e sotto di essi menisi una linea. 2. Per le unità del fattore inferiore si multiplichino le uni-

tà, le decine, le centinaia ec. del fattore superiore. 3. E lo stesso facciasi successivamente, cioè multiplicando le decine, le centinaia ec. del fattore inferiore per le unità, decine, centinaia, ec. del fattore superiore. 4. Tutti quei prodotti parziali che non eccedono il 9 si scrivano tali quali: se poi eccedono questo numero, si notino i soli avanzi sulle decine, e le decine si aggiungano al prodotto del numero che immediatamente segue. 5. Avvertendo però di notar zero, e quando i prodotti pareggiano le decine, e quando si multiplichi un numero per zero, e lo zero per qualunque numero. 6. I prodotti debbono essere scritti in modo che il prodotto delle decine corrisponda alle decine, quello delle centinaia del fattore inferiore pel fattore superiore corrisponda alla centinaia, ch'è quanto dire, che il prodotto antecedente deve eccedere il seguente, di un carattere a destra. 7. Si trovi la somma di tutt'i prodotti già avuti: questa somma sarà il prodotto di uno nell'altro fattore. Sieno per es. dati.

$$
\begin{array}{lcr}
F. & & 703458 \\
f. & & 598 \\
\hline
p' & = & 5627664 \\
p'' & = & 6331122 \\
p''' & = & 3517290 \\
\hline
P & = & 420667884
\end{array}
$$

Dimostrazione.

Il primo prodotto contiene le unità del fattore inferiore per tutte le cifre del fattore superiore. Il secondo prodotto contiene le decine del fattore inferiore per tutte le cifre del fattore superiore. Il terzo prodotto contiene le centinaia del fattore inferiore per tutte le cifre del fattore superiore. Ma il prodotto finale contiene la somma di tutti questi prodotti parziali. Dunque è esatto un tal prodotto sempre che siasi rettamente eseguito.

2. Avv. 1. Se i fattori hanno zeri a principio, cioè sulla diritta, la moltiplicazione potrà abbreviarsi eseguendola senza gli zeri, ma al prodotto degli altri numeri aggiungere tanti zeri quanti sono in ambedue i fattori: per es.

$$
\begin{array}{lcr}
F = & & 750000000 \\
f = & & 50000 \\
\hline
P = & & 37500000000000
\end{array}
$$

3. Avv. 2. Che se poi i zeri trovinsi nel mezzo di uno de'fattori, che per maggior chiarezza situiamo sotto: la multiplica-

zione si potrà abbreviare segnando semplicemente i prodotti per quei zeri: sia per es.

$$
\begin{array}{r}
F = 703458 \\
f = 300002 \\
\hline
1406916 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
2110374 \\
\hline
P.\ 2110388 06916
\end{array}
$$

4. Problema. *Dividere un numero maggiore per un numero minore, ma che non oltrepassi il 9.*

Per maggior chiarezza il numero maggiore chiameremo *dividendo*, o *divisore* il numero minore: uno *D*: L'altro *d*. E perchè tutta la quistione consiste a vedere quante volte il divisore entri nel dividendo: il numero esprimente questa tale quantità dicesi (*quoziente*): e noi lo dinoteremo con la lettera Q. Ciò premesso.

1. Si situino il dividendo e il divisore uno in certa distanza dall'altro; e sotto il divisore sia tirata una linea per scrivere le cifre del quoziente. 2. Nel primo carattere del dividendo situato a destra si sperimenti quante volte entri il divisore, purchè quello sia maggiore, altrimenti questo esperimento abbia luogo nelle due prime cifre del dividendo, e il quoto si noti sotto il divisore: 3. Questa prima cifra del quoto si multiplichi pel divisore, e il prodotto si sottragga dalla cifra, o delle due cifre già prese nel dividendo. 4. Notato l'avanzo, si apponga a lato dell'avanzo la cifra che immediatamente segue nel dividendo. E si prosegua come si è fatto nel trovare la prima cifra del quoto. 5. Tenendo però sempre presente di notare nel quoto col *zero* tutte le volte che il divisore non entri nel dividendo. 6. Il numero trovato sotto il divisore indicherà quante volte il dividendo contiene il divisore dato, cioè sarà il quoziente cercato.

Sieno dati per esempio

$$\begin{array}{l} d = 9 \\ \hline Q = 19788 \end{array} \qquad \begin{array}{l} D = 178092 \\ \cdots 9 \\ \hline \quad 88 \\ \quad 81 \\ \hline \quad\ 70 \\ \quad\ 63 \\ \hline \quad\ \ 79 \\ \quad\ \ 72 \\ \hline \quad\ \ \ 72 \\ \quad\ \ \ 72 \\ \hline \end{array}$$

Se poi nell'ultima sottrazione rimanesse residuo: si metterebbe a destra del quoto, apponendovi sotto tal numero il divisore. Segno che dovrebbe essere continuata la divisione, ma che non si può in quel tale genere di unità. Ciò che darebbe origine al Trattato delle Frazioni Aritmetiche.

Dimostrazione.

La divisione ha per oggetto di spartire il dividendo in quante parti dinota il divisore. Ma operando del modo prescritto, si vede quante volte il divisore si contiene in ciascuna parte del dividendo. Dunque il quoziente avuto, rettamente esprime il numero delle volte, che il divisore è contenuto nel dividendo.

5. Problema. *Dividere uno per altro numero composto.* La divisione de' numeri composti arresta tante volte i giovanetti nello studio dell'Aritmetica. Perciò è pregato il Professore usare molta pazienza, e soprattutto ritornare più volte sopra questo problema.

1. Si mettano il dividendo e il divisore in qualche distanza tra loro: 2. Dal dividendo si prendano tante cifre sulla sinistra, quante sono quelle del divisore: se si ha dalle cifre del dividendo un numero che non sia minore del numero espresso dal divisore, altrimenti se ne prenda una di più. 3. Nella prima, o nelle due prime cifre del dividendo (secondo che pareggiano, o contengono una di più di quelle del divisore) si provi quante volte entri la prima cifra del divisore, e il quoto si tenga a mente. 4. Questo quoto allora si scriva sotto il divisore, quando tutte le altre cifre del divisore rispettivamente sieno contenute l'istesso numero di volte in tutt'i numeri composti dai residui delle cifre antecedenti, uniti alle cifre che immediatamente seguono nel di-

videndo. 5. Che se non entrino, il quoto si diminuisca per unità, finchè divenghi quoto comune. 6. Questo quoto si multiplichi pel divisore, e il prodotto si sottragga dalle corrispondenti cifre a sinistra del dividendo. E così proseguasi fino all'ultima. 7. Avvertendo di notar zero sempre che il divisore non entri nel dividendo. Sia per esempio

Esempio 1.°

d = 987	D. 786945
Q = 797 $\frac{306}{987}$	6909
	= 9604
	8583
	7215
	6909
	= 306

Osservazione. 1. Parecchi fanno la divisione, obbligando i giovanetti tenere a mente i prodotti parziali del quoto nel divisore, e sotto il dividendo notare i soli residui Ma questo metodo, quantunque breve, è a principianti molto difficile. La difficoltà però potrebbe essere superata dall'abito. Io pertanto mi sono servito del metodo già prescritto, perchè i giovani nelle divisioni algebriche non vedessero poi fatto tutto diversamense di quello che hanno operato nelle divisioni aritmetiche: è però utilissimo tale esercizio, e perciò ho apposto l'esempio, secondo questo altro metodo, che sarà facile sviluppare del seguente modo

Esempio 2.°

d = 987	D = 786945
Q = 797 $\frac{306}{987}$	9604
	7215
	306

Prese dal dividendo le convenienti cifre, si proceda nel seguente modo. Il 9 in 78 entra 7 volte, del pari che ogni cifra del divisore nelle rimanenti parti del dividendo. Or il quoto 7 multiplicato pel divisore 7 dà 49: che tolto dalle ultime cifre del dividendo già preso dà 0 per residuo; e le 4 decine si aggiungano al prodotto seguente. Il quoto 7 mul. pel divisore 8 dà 56, al quale aggiunte 4 (decine) dà 60; il quale tolto delle cifre rimanenti del dividendo dà per residuo 6, e le 6 decine si aggiungano al prodotto seguente. Finalmente il quoto 7 mult. pel div. 9 ug. 63, al quale agg. 6 dà 69: che sottratto dà 78 ug. 9. E così di seguito.

Osservazione. 2. Se tanto il divisore, quanto il dividendo avessero zeri, si cassino tanti dall'uno quanti dall'altro, e la divisione si può eseguire senza tali zeri Sia per esempio

$$\begin{array}{l} D = 300 \\ \hline Q = 2638 \end{array} \qquad D = 789000$$

6. Problema. *Provare la multiplicazione.* 1. Il prodotto si divida per uno dei fattori. 2. Se il quoto è identico all'altro fattore, è indizio di retta operazione. Per esempio

$$\begin{array}{rl} F = & 7834 \\ f = & 387 \\ \hline p' = & 54838 \\ p'' = & 62672 \\ p''' = & 23502 \\ \hline P = & 3031758 \end{array}$$

Or dunque

$$\begin{array}{l} d = 7834 \\ \hline Q = 387 \end{array} \qquad \begin{array}{r} D.\ 3031758 \\ 23602 \\ \hline = 68155 \\ 62672 \\ \hline 54838 \\ 54838 \\ \hline \end{array}$$

Essendo dunque Q. = f. cioè il quoto eguale all'altro fattore, si ha sufficiente criterio per concludere della rettitudine di tale multiplicazione.

Dimostrazione.

Se il dividendo è numero che risulta da tutte le unità di un fattore multiplicato per tutte le unità dell'altro: i fattori si possono considerare come le parti, dalla multiplicazione delle quali risulta il prodotto, ch'è passato a dividendo. A misura che dunque dividesi per un fattore, il quoto dev'essere l'altro fattore. Ecco dunque una formola generalissima

$$\frac{P}{F} = f. \quad \frac{P}{f.} = F.$$

Cioè il prodotto contiene un fattore, quante fiate l'altro con-

tiene l'unità P : F :: f : 1 ovvero P : f :: F : 1. La divisione dunque è prôva della multiplicazione.

5. Problema. *Provare la divisione.* 1. Il quoto si multiplichi pel divisore, e al prodotto si aggiunga, se vi è residuo della divisione 2. Dall'identità tra questo prodotto, e il dividendo si può concludere della legittimità della operazione. Sieno p. e.

d = 43	D = 78048
Q. 1815	43
	350
	344
	= 64
	43
	218
	215
	= 3

Or Q = F = 1815
d = f = 43
5445
7260
P = 78045
ag. . . . 3
Sarà P = D = 78048

Dimostrazione.

La dimostrazione anch'è chiarissima. Poichè se il quoto dinota quante volte il divisore entra nel dividendo: il divisore, e il quoto si possono considerare come le parti dalla cui multiplicazione risulta il Dividendo; aggiunto al loro prodotto il residuo della divisione. A misura che dunque multiplicando queste parti tra loro si ottiene un prodotto eguale al dividendo, si ottiene un criterio sufficientemente certo per la rettitudine di tale operazione. Quindi intendesi un'altra formola generale, cioè $\frac{D}{d} = Q$. Ovvero $Q \cdot d = D$. Ovvero D : d :: Q : 1. Ovvero D : Q :: d : 1.

LEZIONE IV.

De' Rotti.

1. *Breve introduzione al trattato de' Rotti.* Il trattato, al quale volgiamo mente, è difficile per sè stesso: ma però è così necessario, che senza piena intelligenza di esso sarebbe inutil cosa continuare qualunque scienza di calcolo: la difficoltà dunque è ricompensata dall'utile che se ne trae. Se è mio obbligo essere chiaro più che conviene; sia vostra gentilezza almeno prestare attenzione. Il Borghini così caro alle Matematiche, come carissimo alla lingua gentil sonante e pura, nel classico trattato della moneta Fiorentina duolevasi, vedendo che non tutti sapevano fare di que' *conti* a punto, e così presto; ed attribuiva la cagione all'ignoranza che avevasi de' Rotti. « Oltrecchè, egli dice, vi caggiono spesso rotti, che maggiormente avviluppano il cervello degl'idioti e poco pratichi di cota' mercati. » Se vi cale non farvi colpire dalla censura di così egregio scrittore; ponetevi in mente di voler seriamente e con profitto studiare. Se non dirò cose nuove; nuove mi adoprerò che fossero la chiarezza e la brevità.

2. *Genesi dell' idea di rotto.* Sempre che in una divisione il *divisore* non misura esattamente il dividendo; si è detto che il *residuo* debbe situarsi a destra del quoziente, apponendovi sotto il divisore; il primo, distinto e separato dall'altro per linea frapposta. E ciò significa: « quella parte del dividendo doversi tuttavia dividere per l'istesso divisore; ma non potersi in quel genere di unità, essendo questo tal residuo minore dell'istesso divisore ». Se p. e. 23 si deve dividere per 5, si avrà per quoto 4, e per residuo 3, il quale tuttavia si deve dividere per 5. Sicchè $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$. Or l'espressione $\frac{3}{5}$ dicesi *rotto*. quasi che bisogna rompere e sminuzzolare le tre unità per spartirle in cinque parti uguali. Ecco la vera genesi dell'idea di *rotto*. Il *rotto* dunque è certa idea complessa, nella quale trovansi compresi e il numero che si deve dividere, e quello per cui si deve fare tale divisione: il primo numera le unità che si debbono dividere; il secondo denomina per qual numero debbe farsi tale divisione: *numeratore*, e *denominatore*.

Il *rotto* suol essere pure definito: « certa espressione numerica che contrassegna una, o più parti della unità divisa in determinato numero di parti uguali ». Secondo quest'ultima definizione il rotto $\frac{3}{5}$ dinota « che l'unità, al quale riferiscesi,

debbe dividersi in 5 parti uguali, e prendere di siffatte parti 3. E siccome noi terremo: « essere il rotto segno di divisione del numeratore pel denominatore » perciò aggiungiamo il seguente *Teorema*

3. *Il quoto del numeratore pel denominatore pareggia il quoto dell' unità pel denominatore, multiplicato pel numeratore di un medesimo rotto*. Per es. $\frac{3}{5}$ di carlino $= \frac{1}{5} . 3$. Di fatti nel rotto $\frac{3}{5}$ di carlino il quoto è $= 6$ gr. Nel rotto $\frac{1}{5}$ di carlino $= 2$. Ma $2 . 3 = 6$.

Dunque $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} . 3$. Ecco una verità primitiva, verità di fatto, come il dato fondamentale della dottrina de' rotti.

Noi dunque valuteremo il rotto per quel quoto che si ha, dividendo il numeratore pel denominatore. Che è quanto dire $\frac{N}{D} = \frac{1}{D} . N$.

4. Bene approfondito che cosa fosse propriamente *rotto*, rendesi facile dedurre due utilissime conseguenze. 1. Un rotto aumentarsi di una data quantità, *multiplicando* il numeratore, rimanendo integro il denominatore: ovvero dividendo il denominatore, e rimanendo integro il numeratore. Così p. e. se il rotto $\frac{2}{4}$ si deve multiplicare per 2, esso subisce queste due trasformazioni, secondo che si opera sul numeratore, o sul denominatore $\frac{2}{4:2} = \frac{2}{2} = 1$, ovvero $\frac{2 \cdot 2}{4} = \frac{4}{4} = \frac{2}{2} = 1$. 2.° Un rotto dividersi, o dividendo il numeratore, rimanendo integro il denominatore; ovvero multiplicando il denominatore, rimanendo integro il numeratore. Così a modo di esempio se il rotto $\frac{2}{4}$ si volesse dividere per 2 esso anderà soggetto alle due seguenti trasformazioni, secondo che si sarà operato o sul numeratore, o sul denominatore, cioè sarà eguale $\frac{1}{4}$ ovvero $\frac{2}{8}$.

5. Queste trasformazioni sono necessarie, e se ne avrà bisogno in tutta la scienza del calcolo. E bisogna notare tutte e due questi modi di trasformare i rotti, perchè nei casi particolari non riuscendo di operare sul numeratore, si opererà sul denominatore. Così p. e. Se si vuol dividere per 2 il rotto $\frac{3}{4}$, non riuscendo operare sul numeratore 3, volgeremo la mente sul 4,

e lo trasformeremo nel rotto $\frac{3}{8}$. Parimenti se dobbiamo multiplicare per 2 il rotto $\frac{4}{5}$ non riuscendoci operare sul 5, volgeremo la mente sul 4, e lo trasformeremo $\frac{8}{5}$.

6. E perchè ogni rotto è segno di divisione, in cui il numeratore è dividendo, e il denominatore è divisore; per questo anche traesi l'altro vantaggio di sapere se un rotto fosse minore, uguale, o maggiore dell'unità, alla quale riferiscesi. Poichè o il numeratore è minore del denominatore, e il rotto vale meno dell'unità; o il numeratore è eguale al denominatore, e il rotto vale quanto l'unità; o il numero è maggiore del denominatore, e il rotto vale più dell'unità. Quindi $\frac{5}{7} < 1$: Il rotto $\frac{8}{8} = 1$. Il rotto $\frac{8}{7} > 1$. Proprietà non solo essenziali per sè stesse, ma anche perchè se ne fa uso in ogni specie di calcoli aritmetici ed algebrici.

7. Il Trattato de' rotti non dev' essere tanto astratto e ideologico, che i giovani indipendentemente di ragionati esempî arrivino ad intenderlo. Nel bisogno dunque e nella necessità di rendere facilissima ogni futura teorica; noi qui aggiungiamo un quadretto sinottico delle principali specie di unità, delle quali tuttavia si fa uso tra noi. Riserbandoci quando parleremo in certa Appendice su i denominati, riportare i cambiamenti fatti con la legge del 6 Aprile 1840.

QUADRETTO

Delle misure più comuni tra noi.

Peso.

Cantajo,	Rotoli,	Once.
1	100	$33\frac{1}{3}$

Libra,	Once,	Dramme,	Scrupoli,	Acini.
1	12	10	3	20

Tempo.

Secolo,	Anni,	Mesi,	Giorni,	Ore,	Minuti primi,	Minuti secondi.
1	100	12	30	24	60′	60″

Danaro.

Ducato,	Carlini,	Grana,	Cavalli o piccioli.
1	10	10	10

Misura.

Canna,	Palmi,	Once,	Minuti.
1	8	12	5

8. Movendoci sempre dal principio, che « ogni rotto è segno di divisione del numeratore pel denominatore: è facile trovare il valore di ogni rotto, che riferiscesi a conosciute unità ». Se per esempio vi dimando il valore del rotto $\frac{2}{3}$ di canna, $\frac{5}{7}$ di cantaio, $\frac{2}{3}$ di carlino, voi senza improvvisare non sapreste rettamente rispondere: ma se vi prevalete del sussidio dell'Aritmetica, vi toglierete da ogni imbarazzo. Veniamo al fatto: si cerca sapere coi principî in queste lezioni statuiti a qual valore corrisponda il rotto $\frac{2}{3}$ di canna: la soluzione e la dimostrazione

sono facilissime. Passi il 2 a dividendo, e il 3 a divisore. Riducansi le due Canne a palmi, e si abbia fermo il principio « tutt'i residui ridursi successivamente nelle unità delle specie prossimamente inferiori ». I quoti delle diverse unità costituenti la specie proposta determineranno il valore del rotto proposto.

Sia nel caso nostro da conoscere il valore di $\frac{2}{3}$ di canna

d = 3	D = 2 canne
Q 5, 4	8 palmi
	16 palmi
	15
	1
	12 once
	12 once
	12

Sicchè due terzi di canna, nel linguaggio comune vale palmi 5 e 4 once.

Similmente operando si troverà che il rotto $\frac{5}{7}$ di cantajo, nel linguaggio comune e commerciale equivale a 71 rot. 14 onc. Tutto ciò rendesi noto da quello che dicevamo sulla natura del rotto.

9. Ottenendosi il valore di un rotto con dividere il numeratore pel denominatore, è facile capire, come un intero può prendere la forma di rotto, dandogli per denominatore l'unità. Per questa ragione, sempre che in appresso agl'interi che entreranno in calcolo co' rotti dovremo dare anche la forma frazionaria, apporremo per denominatore 1; E diremo per esempio $7 = \frac{7}{1}$, $99 = \frac{99}{1}$.

10. Anzi da questo istesso principio emerge, che *rotto vero* nello stretto e proprio senso debbe dirsi quella espressione, la quale ha il numeratore minore del denominatore. Dirsi poi *rotto spurio*, apparente, quella espressione, la quale ha il numeratore o eguale, o maggiore del denominatore. Sicchè il vero rotto vale meno dell'unità; il rotto spurio o pareggia, o vale più dell'unità.

LEZIONE V.

Continuazione su i Rotti.

1. Passiamo a certe trasformazioni *importanti* nella teorica de' rotti. Esse sono così necessarie, che senza tali evoluzioni niun problema riguardo ai rotti si potrebbe risolvere. La prima di tali trasformazione è: « i termini di ogni rotto multiplicati per un'istesso intero cambiano figura, ma ritengono l'istesso valore ». Ovvero: un rotto multiplicato per un medesimo intero, sì il numeratore che il denominatore, vale tanto dopo, quanto valeva prima che si fosse fatta la multiplicazione. Per esempio $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6}{8}$ ovvero $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

Dimostrazione.

Avvertimento. Ecco una verità così da noi dimostrata, che ha dell'evidente: nè tal nostra dimostrazione ricordiamo averla mai letta in autore alcuno. Anzi ricordiamo con pena l'arroganza di taluni, che per onore della carica che avevano non nominiamo, i quali cercavano levarci un popolo contro questa dimostrazione, ch'è pari alla luce del giorno.

Quando il rotto $\frac{3}{4}$ è multiplicato per 2, così per riguardo al numeratore, come per riguardo al denominatore; esso è multiplicato, apparentemente per 2, ma realmente per $\frac{2}{2}$. E siccome abbiamo detto che quando un rotto ha il numeratore eguale al denominatore, che il rotto in tal caso è eguale all'unità: perciò è forza dedurre che $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}$. In generale $\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{x}=\frac{a}{b}\frac{x}{x}=\frac{a}{b}$. Preferiamo questa, perchè più evidente, a quella dimostrazione data dal Sig. Lacroix.

2. La seconda trasformazione ne' rotti è la seguente: « i termini di un rotto divisi per qualunque comune divisore, cambiano figura, ma ritengono l'istesso valore » ovvero un rotto diviso in tutti due i suoi termini per un numero, vale tanto dopo, quanto valeva prima la divisione. Per esem. $\frac{6}{8}:\frac{2}{2}=\frac{3}{4}$. E sarà $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Dimostrazione.

Perchè il rotto $\frac{6}{8}$ apparentemente è diviso per 2, ma realmente per $\frac{2}{2} = 1$. Dunque $\frac{6}{8}$ è diviso per 1. Ma ogni numero diviso per 1 è uguale a sè stesso. Dunque $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

In generale $\frac{ax}{bx} : x = \frac{a}{b}$.

3. *Massima comune misura di un rotto*. Sovente accade imbatterci in espressioni frazionarie, che apparentemente sembrano stragrandi: mentre divise ne' loro termini per certo numero, riduconsi a termini tanto menomi, che si vede facilmente quanto valgano. Or i divisori de' termini della frazione possono essere parecchi: all' Aritmetico giova sapere il massimo tra loro; perchè è naturale intendere, che « quanto maggiore è il divisore, tanto minore è il quoto; e che ove massimo è il comune divisore, minima è la espressione frazionaria ». Nel rotto $\frac{12}{24}$, il numeratore, e il denominatore possono essere divisi per 2, 3, 4, 6, 12. E in conseguenza trasformare il rotto dato negli altri $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{2}$. Tra quelli divisori dunque noi cerchiamo il modo di ottenere il massimo, ch' è 12, perche poi tra tutte queste trasformazioni troviamo la più semplice, che è $\frac{1}{2}$.

Per trovare il *massimo comun divisore* tra i termini di una frazione: bisogna 1. dividere il denominatore pel numeratore, situando uno a destra, l' altro a sinistra, come dicevamo nella divisione: 2. non tener conto del quoto, ma bensì del residuo: 3. dividere il numeratore per questo residuo, e notare il nuovo residuo: 4. dividere il primo pel secondo residuo; e così successivamente il secondo pel terzo, fino a che imbattisi in un residuo che esattamente divide l' antecedente. Questo tale residuo non solo ch' è divisore delle due prime quantità, numeratore e denominatore, ma bensì è il massimo.

Sia p. e. da ridurre a menomi termini, ovvero trovare il massimo comune divisore tra i termini della frazione $\frac{91}{294}$. Si operi

come si è detto.

d	D	Quoti
91	294	3
84	273	4
07	021 Res.	3

Sicchè 7 è massimo e comune divisore. Onde il rotto $\frac{91}{294} : \frac{7}{7} = \frac{13}{42}$.

Similmente si trova che essendo 13 comune divisore di 143, 637, che il rotto $\frac{143}{637} = \frac{11}{49}$. E che essendo 752 comune divisore de' numeri 3760, 9024, che il rotto $\frac{3760}{9024} = \frac{5}{12}$. E così di ogni altro.

Quello che si fa in numeri, suole pure essere adoperato nel trovare l'*aliquota*, vogliamo dire la massima comune misura, la ragione, tra due linee *commensurabili*. Difatti se A, e B sono due linee, la prima maggiore dell' altra, si porti la minore sulla maggiore, e si noti l'avanzo: quindi l'avanzo sulla linea minore, e si noti il nuovo avanzo: quindi questo sul primo, e così di seguito: si conoscerà l' ultimo residuo esatto. È perciò un numero che misura esattamente le due linee; è perciò il rapporto tra le due linee; o come Newton diceva il numero dell'una linea e dell' altra, relativamente all' aliquota e all'unità trovata.

Dimostrazione.

Che l' ultimo residuo debba essere misura de' primi numeri, è facile intendere: dopoichè se esattamente ogni conseguente misura il suo antecedente, l'ultimo numero dunque è misura esatta di tutti, e perciò anche de' numeri dati. Che la espressione abbreviata abbia il valore dell'espressione data, anche facilmente si può intendere; perchè tanto il numeratore, quanto il denominatore, sono divisi pel numero trovato.

4. *Osservazione*. Tante volte avviene che non è uopo ire per le lunghe nel ridurre un rotto alla menoma espressione. Primieramente dunque tutte le frazioni che hanno in numeri pari il numeratore e il denominatore, sono divisibili per 2. Così per esempio $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Secondariamente tutte quelle frazioni, le quali hanno il numeratore e il denominatore che termina con $\frac{0}{0}$, ov-

vero con 5 sono tutte divisibili per 10, e per 5. Così per esempio $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$; e $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$. In terzo luogo tutte quelle frazioni, che hanno il numeratore e il denominatore tali, che la somma semplice delle loro cifre è divisibile per 3, hanno per divisore comune il 3; Tutte però quelle che sono divisibili per 9, lo sono pure per 3 ma non già quelle che sono divisibili per 3 lo sono per 9. Così per esempio $\frac{423}{4251}=\frac{143}{1417}$; Dividendo i termini per 3. E l'espressione $\frac{621}{8280}=\frac{69}{920}$; dividendo per 9.

LEZIONE VI.

Continuazione su i Rotti.

1. *Vera idea del rotto di rotto.* Essendo ogni rotto divisione, e in conseguenza contenendo sempre un quoziente; se s'immagina che il quoziente di un rotto prenda figura di certa unità, e si divida per altro denominatore, e un altro numeratore prenda più parti di questa seconda divisione; tutto il complesso di questa operazione dicesi *rotto di rotto*. Giovanetti! non vi ammazzino le parole: eccovi un esempio di ciò che ho detto. Se p.e. avete la frazione $\frac{2}{5}$ di carlino, e cercate $\frac{1}{2}$ (la metà) di questi $\frac{2}{5}$. Significa che il valor $\frac{2}{5}$ determinato in grana 4 si deve dividere di nuovo per 2, e prenderne 1 di questa divisione. Colla medesima induzione potrete formarvi l'idea *di rotto — di rotto — di rotto* — ec. Sicchè è chiaro che *il rotto di rotto* nel vero e proprio significato si ottiene « dividendo il numeratore pel denominatore; questo quoto dividendosi per l'altro denominatore, e questo nuovo quoto multiplicandosi pel secondo numeratore, e così di seguito ».

2. Come dunque un rotto solo è segno di una semplice divisione; *il rotto di rotto* è segno di due divisioni, ec. Ma basta al presente conoscere la genesi che presenta l'idea *di rotto di rotto*. Dopo lo sviluppo delle già premesse dottrine, cerchiamo il modo come abbreviar tanta fatica, e con facilissimo metodo ridurre a un rotto semplice, ogni *rotto di rotto*.

3. Problema. *Ridurre un rotto di rotto a rotto semplice.* Dopochè si è veduto come mai s'ingenerasse l'idea del rotto di rotto: vede ognuno quanto sarebbe penoso determinare il valore di

un rotto di rotto, secondo che dicevamo nell' antecedente paragrafo. Quindi si è a quello, sostituito il seguente metodo: « Un rotto di rotto ridursi a rotto solo, multiplicando i numeratori tra loro, e i denominatori anche tra loro; e poi i prodotti passarli a termini di una nuova frazione. Essa darà in una nuova espressione il valore del rotto di rotto. Così per esempio l' espressione $\frac{1}{4}$ di $\frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

Dimostrazione.

Il rotto di rotto si compone di due espressioni: esse sono $\frac{1}{4}$ di $\frac{2}{5}$. Se la seconda p. e. ch' è $\frac{2}{5}$ la trasformate in un'altra multiplicandola pel 4, denominatore dell' altra, ella sarà sostituita dall' equivalente $\frac{8}{20}$. Sicchè il rotto di rotto $\frac{1}{4}$ di $\frac{2}{5}$ è sostituito dall' altro $\frac{1}{4}$ di $\frac{8}{20}$. La qual' espressione, secondo che dicevamo, significa che $\frac{8}{20}$ si debbono dividere per 4, onde poi prenderne 1. Ma il rotto si divide, qualora dividesi il numeratore: dunque $\frac{1}{4}$ di $\frac{8}{20} = \frac{2}{20}$. E riducendo alla menoma espressione, rendesi $= \frac{1}{10}$.

4. Dell' istesso modo dimostrasi che il rotto di rotto di rotto $\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{7} = \frac{15}{56}$.

5. Dunque $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{9} = \frac{2}{9}$. Perchè dovrebbesi al tempo stesso multiplicare e dividere per 3. Onde bisogna avvertire che tante volte può abbreviarsi una lunghissima operazione. Per esempio $\frac{5.5.7.2}{2.5.7.6} = \frac{5}{6}$.

6. Dunque tanto è dire $\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}$ di $\frac{5}{7}$: quanto dire $\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{2}$ di $\frac{5}{7}$: quanto è dire pure $\frac{5}{7}$ di $\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}$. In tutt' i casi si ha l' istessa espressione frazionaria per prodotto.

7. *Ridurre un' intero a rotto.* Tante volte avviene che debbesi calcolare con interi uniti a rotti. E in tal caso non basta che i numeri sieno omogenei, ma è inoltre richiesto che sieno ridotti alla forma di rotto: *come dunque un intero riducesi a rotto?* In due casi possiamo imbatterci. 1. Che non sia dato il denominatore: e in tal caso l'intero convertesi in rotto, aggiungendo all'intero per denominatore l'unità. 2. Che se poi richiedesi un determinato denominatore: allora l'intero si multiplichi, e si divida pel dato denominatore. Nel 1. caso $7 = \frac{7}{1}$. Nel 2. caso, se debbesi 7 ridurre a un rotto che abbia per denominatore 3; sarebbe $7 = \frac{21}{3}$. (Lez. IV. p. 9. Lez. V. p. 1.)

Dimostrazione.

8. La ragione del 1. caso è per sè stessa patente: l'unità nè multiplica, nè divide. Dunque tanto è 7; quanto $\frac{7}{1}$: se non che nel primo non vi è forma di rotto, ma bensì nel secondo.

E anche per sè stessa patente la ragione del secondo caso. Perchè se 7 trasformarsi nel rotto $\frac{7}{1}$; sarà $\frac{7}{1} \cdot \frac{3}{3} = \frac{21}{3}$.

9. Tante volte l'espressioni hanno apparenza di rotti; ma esse sono realmente o interi, o interi uniti a rotti, e diconsi spurî: *come dunque un rotto spurio riducesi ad intero?* Dividendosi il numeratore pel denominatore; e così cacciando nel quoto, o un numero intero, o un intero unito a rotto. Così verbigrazia $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

La ragione di questa trasformazione è chiara, e deriva da ciò che dicevamo sulla natura del rotto.

10. Problema. *Ridurre all'istessa denominazione rotti aventi diversi denominatori.* Che se poi dovessero entrare a calcolo rotti di diverso denominatore: sarebbe d'uopo prima ridurli all'istesso denominatore, perchè abbiano tutti uno stesso divisore, e poi procedere alle operazioni. « *Come dunque riduconsi all'istessa denominazione rotti aventi diversi denominatori?* » 1. Il numeratore d'ogni rotto si multiplichi per tutt'i denominatori degli altri rotti (val quanto dire, eccetto il suo): 2. e ad ogni prodotto si dia per denominatore il prodotto di tutt'i denominatori. Per esempio. Sieno da ridursi all'istesso denominatore i rotti $\frac{1}{2}\frac{3}{5}\frac{2}{3}$. Essi saranno rispettivamente uguali $\frac{15}{30}\frac{18}{30}\frac{20}{30}$.

Dimostrazione.

Il rotto $\frac{1}{2}$ si è multiplicato per 5, e per 3, in tutti e due i suoi termini: perciò $= \frac{15}{30}$.

Il rotto $\frac{3}{5}$ si è multiplicato per 2, e per 3, perciò $= \frac{18}{30}$.

E il rotto $\frac{2}{3}$ si è multiplicato per 2, e per 5, perciò $= \frac{20}{30}$.

Dunque ec.

11. Oltre che la riduzione all'istesso denominatore dà luogo ad operazioni, che senza di essa sarebbe impossibile eseguire: ella è pure criterio della maggioranza di uno sopra un'altro rotto. Voi per es. a primo aspetto non discernete se $\frac{3}{4} <$ di $\frac{5}{7}$. Riducendoli all'istesso denominatore troverete il primo uguale $\frac{21}{28}$: il secondo poi uguale $\frac{20}{28}$. Dunque concluderete essere il primo $>$ del secondo rotto.

12. Tante volte anche con brevità di calcolo si può ottenere il medesimo denominatore in due rotti: ed è quando il denominatore di uno trovasi esatto divisore del denominatore dell'altro. Perchè in tal caso « Si esegua mentalmente tal divisione, e pel quoto si multiplichino tanto il numeratore, quanto il denominatore del rotto il cui denominatore è stato divisore dell'altro ». Per esempio sieno dati i rotti $\frac{5}{8}\,\frac{7}{16}$; li avrò ridotto all'istesso denominatore, se dividendo 16 per 8, pel quoto 2 poi multiplico i termini del rotto $\frac{5}{8}$: i rotti saranno $\frac{10}{16}\,\frac{7}{16}$.

13. Quindi se vi sono molti rotti tali che il massimo denominatore di essi sia divisibile per ogni altro di loro individualmente, possono tutti essere facilmente ridotti all'istesso denominatore: dividendo il denominator massimo per ognuno de' denominatori minori individualmente, e per ogni quoto speciale multiplicando i termini della frazione, alla quale spetta il denominatore. Sieno per esempio $\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{3}{8}\,\frac{7}{12}\,\frac{11}{24}$. Essi saranno rispettivamente $= \frac{18}{24}\,\frac{20}{24}\,\frac{9}{24}\,\frac{14}{24}\,\frac{11}{24}$.

LEZIONE VII.

Continuazione su i Rotti.

1. Problema. *Sommare i rotti.* Questo problema abbraccia quattro casi. 1. O i rotti hanno l'istesso denominatore; 2. O ne hanno diversi: 3. O un intero debbesi sommare con rotto: 4. O un intero unito a rotto debbesi sommare con altri interi uniti a rotti.

Nel 1. caso si sommino tutt'i numeratori: e alla somma si dia per denominatore il denominatore che hanno tutt'i rotti. Così per es. se si debbono sommare $\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}$. Sarà la somma $=\frac{18}{7}=2\frac{4}{7}$.

Nel 2. caso: i rotti si riducano all'istesso denominatore, e poi si operi come nel caso 1. Sieno da sommarsi $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}+\frac{1}{4}$.

Ridotti all'stesso denominatore saranno rispettivamente $=\frac{140}{280}+\frac{168}{280}+\frac{80}{280}+\frac{70}{280}=\frac{458}{280}=1\frac{178}{280}=1\frac{89}{140}$.

Nel 3 caso: l'intero si multiplichi pel denominatore, e al prodotto si aggiunga il numeratore, e alla somma si dia per denominatore, il denominatore del rotto. Così per esempio $5+\frac{2}{3}=\frac{17}{3}$.

2. *Avv.* È questo il luogo da notare, come un intero e rotto riduconsi a un rotto solo: cioè l'intero si multiplichi pel denominatore, al prodotto si aggiunga il numeratore, al tutto si dia al denominatore del rotto già dato.

Nel 4. caso finalmente. Se si debbano sommare interi uniti a rotti, con altri interi uniti a rotti: prima si sommino i rotti, per cavarne gl'interi, se ve ne abbia, e poi colle debite osservazioni si passi alla somma degl'interi. Sieno da sommarsi

$$17\frac{2}{3}$$

$$9\frac{1}{4}$$

$$15\frac{1}{5}.$$

Primieramente i rotti $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ sono rispettivamente

$$=\frac{40}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}.$$

Sommando i numeratori li trovo $=\frac{67}{60}=1\ \frac{7}{60}$.

Dunque $\frac{7}{60}$ pongo nel luogo de' rotti, e l'unità portandola su i numeri che seguono, trovo che la loro somma $=42\ \frac{7}{60}$.

La ragione è tanto patente, che non ha bisogno di dimostrazione.

3. Problema. 2. *Sottrarre da un rotto maggiore un rotto minore che si riferisce alla medesima unità.* Anche nella soluzione del presente Problema possono aver luogo quattro casi. 1. Quando i rotti hanno l'istesso denominatore. 2. Quando ne hanno diverso. 3. Quando da un intero debbesi sottrarre un rotto. 4. Quando da un intero e rotto cercasi sottrarre un altro intero e rotto.

Nel 1. caso dal numeratore maggiore sottraggasi il minore; ed al residuo si dia per denominatore quello che è comune a'rotti dati. Così p. es. se da $\frac{5}{7}$ debbo sottrarre $\frac{2}{7}$; il residuo sarà $=\frac{3}{7}$.

Nel 2. caso. I rotti si riducano all'istesso denominatore, e poi si operi come nel caso. 1. Così p. e. se da $\frac{4}{5}$ voglio sottrarre $\frac{2}{7}$, dirò

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{7}.$$

Riducendo saranno $=\frac{28}{35}-\frac{10}{35}=\frac{18}{35}$.

Nel 3. caso. Se da un intero si deve sottrarre un rotto. 1. all'intero si dia per denominatore l'unità. 2. Si riduca all'istesso denominatore, e poi si faccia la sottrazione

Così p. e. se da 7 debbo sottrarre $\frac{2}{5}$, farò $\frac{7}{1}-\frac{2}{5}$. Riducendo, saranno uguali rispettivamente a $\frac{35}{5}-\frac{2}{5}=\frac{33}{5}=6\ \frac{3}{5}$.

4. *Avvertimento*. 1. Questo terzo caso si può con più brevità risolvere: cioè diminuendo d'una unità l'intero, e convertendola in un rotto che abbia numeratore e denominatore simili al denominatore del rotto dato, e poi facendo l'operazione. Sia p. e. da 9 da sottrarsi $\frac{5}{17}$. Io farò da $8\frac{17}{17}-\frac{5}{17}=8\frac{12}{17}$.

5. *Avvertimento*. 2. Tante volte da un intero debbesi sottrarre un rotto spurio p. e. da 9 si vuol sottrarre $\frac{4}{3}$. In tal caso non basta che dall'intero sia tolta una sola unità, ma bisogna che sieno tolte due unità Dunque dell'espressione $9-\frac{4}{3}$. Convertirò il 9 nella quantità uguale a $7\frac{6}{3}$, e dirò $7\frac{6}{3}-\frac{4}{3}=7\frac{2}{3}$.

6. Nel 4. caso; cioè quando da un intero, e rotto, vuolsi sottrarre un altro intero, e rotto

Se p. e. da $15\frac{2}{3}-8\frac{3}{7}$. Riducendo tutto a rotto, saranno rispettivamente $=\frac{47}{3}-\frac{59}{7}$. Riducendo all' istesso denominatore saranno $=\frac{329}{21}-\frac{177}{21}=\frac{152}{21}=7\frac{5}{21}$.

Anche la Dimostrazione è per sè stessa chiara e patente.

LEZIONE VIII.

1. Problema. *Multiplicare i rotti*. Tre sono i casi, che possono aver luogo nella soluzione del proposto problema. 1. Se debba multiplicarsi un rotto per un' altro rotto. 2. Se un intero per un rotto. 3. Se un' intero e rotto per altro intero e rotto.

Nel 1. caso si multiplichino i numeratori tra loro, e anche tra loro i denominatori: quel rotto che avrà per numeratore il primo prodotto, e per denominatore il secondo, sarà il prodotto cercato. Così per esempio

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{8}{21}.$$

Nel 2. caso, all' intero si apponga per denominatore l' unità, e sarà il secondo ridotto al primo caso. Così p. e.

$$5\cdot\frac{3}{7}=\frac{5}{1}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

Nel 3. caso. Ogn' intero e rotto si riduca a un rotto solo: e anche il terzo sarà convertito al primo caso. Così p. e.

$$7\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{4}.$$

Riducendo sarà $= \frac{23}{3} \cdot \frac{17}{4}$.

Ed eseguendo sarà $= \frac{391}{12} = 32\frac{7}{12}$.

Dimostrazione.

Ecco o giovanetti una di quelle dimostrazioni sulle quali incauti taluni passano senza approfondirla: e quindi passando all' Algebra, non vedono mai la ragione della moltiplicazione de' rotti; e per non so quale abitudine poi fondano i loro raziocinî su questa verità, ma nel fondo della verità propriamente non vedono. Vi prego stare attenti. Si domanda dunque: perchè $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$? Ed eccovi la ragione. Se $\frac{2}{3}$ lo aveste dovuto multiplicare pel solo numeratore 4: voi avreste avuto $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$, ovvero $\frac{8}{3}$.

Fatto sta però che voi non vi siete proposti multiplicarlo per 4; ma nell' istesso tempo multiplicarlo per $\frac{4}{7}$; ovvero per 4, e dividerlo per 7. Dunque per fare giusta operazione il prodotto $\frac{8}{3}$ vi resta a dividerlo per 7. Ma noi abbiamo dimostrato, che multiplicandosi il denominatore per un dato numero, è l' istesso che per quel numero dividere la frazione: come se si dicesse $\frac{1}{7}$ di $\frac{8}{3} = \frac{8}{21}$. Il rotto dunque $\frac{8}{3}$ dovendosi dividere per 7 è $= \frac{8}{21}$. Abbadate non farvi ingannare dall' appariscenza del rotto. Col medesimo raziocinio potrete persuadervi degli altri due rimanenti casi.

2. Se non che bisogna che stiate attenti a quello che nella multiplicazione de' rotti suole sempre avvenire: cioè « il prodotto è sempre minore di un fattore »: ciò che pare contro l' idea della

moltiplicazione, la quale è sempre relativa ad aggiungimento di quantità. Or noi vediamo che $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. E vede ognuno il fattore già dato $\frac{3}{4}$ essere maggiore del prodotto $\frac{1}{4}$: mentre che per ragion di moltiplicazione dovrebbe essere il prodotto maggiore di ognuno de' fattori.

Questa idea che si ha della moltiplicazione non può aver luogo nella speciale moltiplicazione de' rotti. Nella quale moltiplicandosi i numeratori tra loro, e i denominatori tra loro, si accresce il divisore sul dividendo, il denominatore sul numeratore; e perciò deve aversi in prodotto una quantità minore del fattore dato.

3. *Osservazione*. Bisogna abituarvi a risparmiar fatica nella moltiplicazione de' rotti. Se per esem. $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{17}$; dovete capire ch' è l' istesso che $\frac{3}{17} \cdot \frac{2}{1}$; ovvero $\frac{6}{17}$. Similmente se $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

4. Problema. *Dividere un rotto per un' altro*. Anche questo problema pari alla moltiplicazione abbraccia tre casi: 1. Dividere un rotto per un altro. 2. Dividere un intero per un rotto; o un rotto per un intero. 3. Un intero e rotto dividerlo per altro intero e rotto.

Nel 1. caso, i termini del divisore si scambino, cioè il numeratore passi a denominatore; e il denominatore a numeratore 2. Si moltiplichino tra loro il rotto scambiato e l'altro. Il prodotto loro sarà il quoto de' rotti primamente dati. Se per esempio $\frac{4}{5}$ si deve dividere per $\frac{2}{5}$; sarà

$$\left(\frac{4}{5}\right) : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}.$$

Nel 2. caso. All' intero si apponga per denominatore l'unità, e poi si operi come nel caso 1. Per esempio si deve 5 dividere per $\frac{3}{7}$ sarà

$$\left(\frac{5}{1}\right) : \frac{3}{7} = \frac{5}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}.$$

Similmente se $\frac{3}{7}$ si debbono dividere per 5 sarà

$$\left(\frac{3}{7}\right) : \frac{5}{1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{35}.$$

Finalmente se un intero e rotto debbesi dividere per altro intero e rotto: bisogna 1.° che ogni intero e rotto si riduca a rotto solo: 2.° che si scambino i termini della seconda espressione, cioè del divisore: 3.° e quindi si operi come ne' casi antecedenti.

Sia per esempio

$$\left(4\frac{2}{3}\right) : \left(3\frac{1}{4}\right).$$

Riducendo l'espressioni sarà

$$\left(\frac{14}{3}\right) : \left(\frac{13}{4}\right).$$

E scambiando i termini del divisore, sarà

$$\left(\frac{14}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{13}\right) = \frac{56}{39} = 1\frac{17}{39}.$$

Dimostrazione.

Perchè dunque $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$? In altri termini: perchè nel dividere uno per un'altro rotto, è d'uopo che i termini del divisore sieno scambiati, e quindi abbia luogo la multiplicazione tra i termini del dividendo già dato, è quelli del divisore scambiato? Anche la dimostrazione di ciò è alquanto ardua a principianti; e perciò è necessaria la vostra attenzione.

Se il rotto $\frac{2}{3}$ si dovesse dividere solamente per 4 (numeratore del divisore); esso sarebbe $\frac{1}{4}$ di $\frac{2}{3}$, ovvero $\frac{2}{12}$, tanto perchè può considerarsi come rotto di rotto, quanto perchè la divisione ha luogo quando il denominatore del rotto multiplicasi pel divisore dato. Il quoto però $\frac{2}{12}$ sarebbe minore del

vero che cercasi; perchè $\frac{2}{3}$ essendosi diviso non già per $\frac{4}{5}$, ma per 4: sa ognuno, che quanto maggiore è il divisore, tanto minore è il quoto; e $4 > \frac{4}{5}$.

Dovendosi dunque dividere per $\frac{4}{5}$, bisogna che il quoto vero corrisponda al quintuplo di $\frac{2}{12}$, ovvero corrisponda a

$$\frac{2}{12} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}.$$

4. Se non che bisogna che poniate mente al quoto che si ottiene nella divisione delle frazioni. Esso è sempre maggiore del dividendo, come nell' addotto esempio può facilmente rilevarsi, nel quale il quoto $\frac{5}{6} >$ del dividendo $\frac{2}{3}$: perchè ridotti all' istesso denominatore saranno rispettivamente uguali $\frac{15}{18}$ $\frac{12}{18}$, e vede ognuno essere $\frac{15}{18} > \frac{12}{18}$. E questo potrebbe essere contro l' idea che si ha della divisione, nella quale il quoto dovrebbe essere parte del dividendo, e perciò minore di esso. Perchè dunque nella divisione de' rotti si ottiene un risultamento totalmente diverso?

Abbadate che nella divisione de' rotti dovendosi scambiare i termini del divisore, e quindi dar luogo alla moltiplicazione, il numeratore del dividendo si moltiplica pel denominatore del divisore, e il denominatore di quello pel numeratore di questo: in conseguenza vi è aumento nel prodotto de' numeratori sopra il prodotto de' denominatori; e in conseguenza il quoto viene ad aumentarsi sul dividendo già dato.

5. *Osservazione.* Quindi niente è più facile quanto capire mille, anzi infinite sostituzioni, che possono aver luogo nel trattato de' rotti: e che è indispensabile a un giovinetto non renderne ragione, ed adottarle. Se per esempio $\left(\frac{3}{5}\right) : \frac{9}{7}$, ecco quante sostituzioni possono aver luogo.

Sarà

$$\left(\frac{3}{5}:\frac{9}{7}\right)=$$

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}=$$

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{9}=$$

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{15}.$$

Similmente se il dividendo e il divisore avessero il medesimo numeratore, la divisione sarà fatta con più brevità: perchè il quoto è un rotto avente per numeratore il denominatore del divisore, e per denominatore il denominatore del dividendo. Sia per esempio

$$\frac{3}{5}:\frac{3}{7}$$

sarà uguale $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{3}$

sarà uguale $\frac{7}{5}\cdot\frac{3}{3}$

sarà uguale $\frac{7}{5}.$

Quindi $\frac{7}{6}:\frac{7}{9}=\frac{9}{6}=\frac{2}{3}.$

LEZIONE IX.

Delle Frazioni Decimali.

1. *Definizione del rotto decimale.* Ogni espressione numerica ch'è segno di divisione di numero minore per altro numero maggiore, od anche della unità per qualunque numero, dicesi rotto, o frazione. I termini dunque de'rotti possono in infinite guise cambiare. Sempre che però i denominatori de'rotti sono 10, 100, 1000, 10000, ec. essi diconsi rotti decimali. Il rotto decimale dunque differisce dal rotto comune solamente perchè

il denominatore del *rotto comune* può essere qualunque numero, quello poi del *rotto decimale* dev' essere assolutamente 10, e tutt' i prodotti decupli di esso. Dunque siccome non già rotti decimali, ma *comuni*, diconsi $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$ ec.; così neanche decimali ma comuni saranno $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{9}{70}$ ec. ec. saranno però rotti decimali $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{7}{1000}$ ec. ec.

2. *Spiegasi più chiaramente con la genesi del rotto decimale la definizione già data.* Che il rotto per es. $\frac{3}{10}$ sia rotto decimale, è facile intenderlo e rilevarlo da ciò che dicevamo sulla genesi del rotto generalmente considerato. Tutta la difficoltà pe' principianti consiste a far loro vedere, come del pari frazione decimale sia $\frac{7}{100}$. Ed eccone la ragione.

Il rotto $\frac{7}{100}$ può essere decomposto nella seguente espressione $\frac{7}{10}$ di $\frac{1}{10}$, ovvero in un rotto di rotto. Sicchè se $\frac{3}{10}$ è frazione decimale per riguardo all'unità: la frazione $\frac{7}{100}$ è decimale di decimale.

Similmente si dimostra essere

$$\frac{11}{1000} = \frac{11}{10} \text{ di } \frac{1}{10} \text{ di } \frac{1}{10}.$$

E l' altra $$\frac{7}{10000} = \frac{7}{10} \text{ di } \frac{1}{10} \text{ di } \frac{1}{10} \text{ di } \frac{1}{10}.$$

Dunque tutt' i rotti che hanno per denominatore 10, 100, 1000 diconsi *decimali* nel senso che o dinotano parti decime dell' unità, o parti decime di parti decime, ovvero decime di decime di decime, ec ec.

3. *In che cosa le frazioni decimali convengono, e in che cosa disconvengono co' rotti comuni.* Or sebbene i rotti decimali potessero venir compresi sotto la teorica de' rotti comuni della quale ci siamo occupati nelle lezioni che sono immediatamente precedute: ciò non ostante noi anderemo cercando certe leggi tutte proprie ed essenziali ad essi; val quanto

dire con quali metodi peculiari dovessimo usar di essi nel calcolare. Quando però taluno presumesse dubitare de' risultamenti che daranno i metodi che anderemo investigando, sarà forza che ricorressimo alle dottrine de' *rotti comuni*, come ai principî che dânno evidenza a queste deduzioni particolari. Le prôve dunque constituenti la evidenza delle dottrine de' decimali, saranno tutte da ripetersi dalla teorica de' rotti antecedentemente stabilita.

4. *Analisi del valore d' ogni cifra costituente una frazione decimale.* Se vi è data una espressione in decimali, ancorchè la sentiste profferita da altri, standovi alle conoscenze aritmetiche che attualmente vi avete, renderebbesi difficile approfondire il suo proprio valore: e ho veduto molti giovinetti, che sebbene parevano versati ne' decimali; tutta però quella intelligenza era quasi automatica e superficiale; perchè mancavano dell' analisi di tali cifre; e scienza non è, ove manca la chiarezza, la distinzione, l' analisi.

Or sappiate che in ogni espressione decimale, facendo bene l' analisi, il primo carattere a destra rappresenta parti decime dell' unità; il secondo carattere contiene parti centesime della medesima unità; il terzo carattere contiene parti millesime della medesima unità ec. ec. il sesto carattere contiene parti millionesime della medesima unità. Non dimenticate, che sebbene ogni rotto è quoto del numeratore pel denominatore; pure può ogni rotto essere considerato come il quoto della unità divisa pel denominatore, e multiplicato pel numeratore. Voglio che nelle frazioni decimali abbiate presente quest' ultimo modo di valutare ogni rotto. Se per es. vi è data le frazione $\frac{243}{1000}$ (1), essa può venire spartita e sostituita nelle tre seguenti

$$\frac{200}{1000}, \frac{40}{1000}, \frac{3}{1000}$$

ovvero

$$\frac{2}{10}, \frac{4}{100}, \frac{3}{1000}.$$

---

(1) Avvertite che le cifre del numeratore debbono pareggiare gli zeri del denominatore: perchè se quelle fossero in numero maggiore (per esempio $\frac{17}{10}$): in tal caso deriverebbe un rotto spurio. E se il numero delle cifre fosse minore de' zeri, deriverebbe una frazione decimale, ma mancante delle parti decime, centesime ec. secondo che le cifre saranno di uno, di due caratteri ec. minori del numero de' zeri.

Il 2 dunque, primo carattere sulla sinistra, ha per denominatore apparente 1000, ma il suo vero e proprio denominatore è 10. Il 4, secondo carattere sulla sinistra, ha per denominatore apparente 1000, ma il suo vero denominatore è 100. E così andate voi discorrendo sopra ogni altra espressione decimale. Troverete sempre che in ogni espressione decimale il denominatore costituiscesi da tanti zeri, quante sono le cifre della frazione, ed i zeri debbono essere preceduti da 1. Onde è che data l' espressione decimale 0, 17; Ella convertesi nella seguente $\frac{17}{100}$.

5. Non passate senza attenzione sopra queste nozioni fondamentali: perchè senza abituarvi a capire che le cifre decimali hanno queste loro leggi peculiari, non potrete fare progressi nella Scienza. Sicchè se in una espressione decimale trovate sei cifre, il denominatore di essa sarà 1000000: e se avrete una espressione con sette cifre, il denominatore di essa sarà 10000000.

6. In conseguenza di questi principî è paruto conveniente a Matematici trattare i decimali senza denominatori; perchè niente è più naturale, quanto supporre un denominatore della condizione che abbiamo detto nell' antecedente paragrafo. Sicchè $\frac{2}{10}$, $\frac{35}{100}$, $\frac{237}{1000}$ si possono scrivere del seguente modo

0, 2 0, 35 0, 237.

7. Lo zero a sinistra dinota il luogo degl' interi, sempre che si debbono trattare unitamente a decimali. Esso per una virgoletta è separato dalle cifre decimali. E altri segnano con un puntino questa tale separazione: noi abbiamo adottato la virgola, per evitare la confusione che il punto introdurrebbe pel segno della moltiplicazione che infinite volte rappresenta. Ecco dunque nelle frazioni decimali maggiore chiarezza e brevità di quella che trovasi ne' rotti comuni.

8. E siccome fu stabilito, ed è universalmente ricevuto, che nelle serie de' numeri le mancanze delle cifre intermedie venissero indicate con zeri: perciò capite che l' espressione 0,07 leggesi sette centesimi; perchè mancano le parti decime, la cui mancanza è indicata dal zero, ch' è nel luogo de' decimali. Parimenti la espressione 0,302 profferiscesi trecentodue millesimi, perchè mancano le parti decime; e così andate voi discorrendo.

9. Che se gli zeri non già nel mezzo della frazione trovansi, ma al principio sulla sinistra, bisogna che la espressione sia valutata come mancante di parti decime, se è un zero;

come mancante di parti centesime, se sono due zeri, ec. ec. I decimali dunque sono di tal proprietà, che tenendo zeri a principio sulla sinistra, tanto più per decine decrescono, per quanto più accresconsi zeri. Onde rendesi chiaro che $0{,}007 < 0{,}07$; perchè nella prima il denominatore è 1000, e nella seconda è 100: e in entrambe il numeratore è 7.

10. Questa medesima ragione vi autorizza a concludere; che se ad una frazione decimale aggiungansi zeri dalla parte diritta; ella vale tanto dopo i zeri aggiunti, quanto valeva prima che si fossero aggiunti. Per esempio

$$0{,}70 = 0{,}700 = 0{,}7000 \text{ ec. ec.}$$

11. Niuno dunque sarà tra di voi, che in appresso non intenderà chiaramente queste proprietà, e queste trasformazioni. Egli sarà persuaso che i decimali procedono con certe leggi totalmente diverse da' numeri interi. Perchè mentre gl' interi aumentano aggiungendo loro zeri a diritta, i decimali non alterano il loro valore coll' aggiungimento de' zeri a diritta: e mentre gl' interi non alterano il valore con aggiunger loro zeri a sinistra; i decimali decrescono per decine, centinaia ec. se è loro aggiunto un zero, due zeri alla sinistra.

12. Inoltre è facile dedurre essere erroneo scrivere per esempio $\frac{15}{10}$, $\frac{342}{100}$, $\frac{9733}{1000}$. Queste espressioni risolvonsi in numeri interi aggiunti a frazioni decimali. Essi sono rispettivamente uguali

$$(1{,}5)\ (3{,}42)\ (9{,}733).$$

Valquanto dire, che quando una espressione decimale può convertirsi in intero e rotto, è necessario che sia sostituita negli elementi, ne' quali può essere ridotta.

13. Similmente è facilissimo intendere, che quante volte un' intero unito ad una frazione decimale debb' essere ridotto a decimale, non bisogna fare altro, che porre l' intero nel primo carattere a sinistra della frazione decimale. Sicchè $3{,}7 = \frac{37}{10}$. Parimenti $32{,}57 = \frac{3257}{100}$. E così andate discorrendo.

14. Tante volte pure avviene che un rotto semplice debbe ridursi in frazione decimale. Per ciò fare, basta 1.° che al numeratore sieno aggiunti molti zeri a dritta; 2.° che il dividendo sia diviso pel divisore. Se per es. il rotto $\frac{3}{7}$ si voglia

ridurre in frazione decimale: esso sarà uguale

$$\frac{3,000000}{7} \text{ ec.} = 0,428571 \text{ ec. ec.}$$

15. *Rotti periodici.* Anzi questa conversione di un rotto comune in frazione decimale dà origine a certi rotti detti propriamente *periodici:* cioè tali, che dopo un periodo di cifre riproducensi le medesime, sicchè si potrebbe ripeter la serie quanto più si volesse. Sia per esempio da convertirsi in frazione decimale periodica il rotto $\frac{1}{7}$. Essa sarebbe sostituita della seguente

$$\frac{1,000000000000000000}{7}.$$

In conseguenza è uguale

$$0,142857142857142857 \text{ ec. ec.}$$

Delle frazioni periodiche hanno trattato Wallis nel capo 89 della sua Algebra; Eulero nel capo 12 del libro 1 della sua introduzione all' Algebra; Lambert nel volume terzo degli *Acta Helvetica*, e *Nova Acta Eruditorum* del mese di marzo 1769, finalmente il Robertson nelle Transazioni Filosofiche per il 1768.

Tutto però quanto pare necessario e desiderevole sulle frazioni periodiche può riscontrarsi nel Dizionario Matematico del Lalande Art. Frazioni Decimali Periodiche.

16. Tutte queste nozioni Preliminari fa d' uopo che sieno da giovani ben approfondite: altrimenti invece di cognizioni scientifiche si avrà un miserabile meccanismo. E niente è più frequente in tutte le Matematiche *Pure*, e *miste*, quanto continuamente adoperare de' decimali. Sarebbe dunque disdicevole, anzi turpitudine, ignorare che cosa sieno, che valgano, come si trasformino. Premesse tutte queste necessarie osservazioni, passiamo al calcolo delle frazioni Decimali.

LEZIONE X.

1. Problema. *Sommare i decimali.* Questo problema abbraccia tre casi. 1. Quando i numeri da sommarsi sono tutti decimali. 2. Quando sono interi uniti a decimali; e finalmente. 3. Quando interi uniti a decimali debbonsi sommare con altri interi uniti a decimali.

In tutti e tre questi casi si operi come se i numeri fossero interi. Cioè quando la somma delle cifre, già le une disposte in corrispondenza delle altre, non eccede il 9 si scriva tal quale: quando poi eccede il 9, si notino i soli eccessi sulle decine; e il numero delle decine si aggiunga alla cifra che immediatamente segue.

Esempii.

Sieno da sommarsi

Caso 1.°	Caso 2.°	Caso 3.°
A = 0,7873	A = 78,100	A = 23,027
B = 0,5094	B = 0,934	B = 7,198
C = 0,0098	C = 7,900	C = 29,607
S = 1,3065	S = 86,934	S = 59,832

La dimostrazione è facilissima. Perchè nel 1.° Caso per esempio $\frac{15}{10000} = \frac{10}{10000} + \frac{5}{10000} = \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$. Or dunque 5 diecimillesimi si scrivano al proprio luogo, e $\frac{1}{1000}$ si porti alla cifra che immediatamente segue. E così vadasi ragionando sopra tutte le cifre che seguiranno. In questo senso dunque rendesi manifesto che bisogna al proprio luogo scrivere gli avanzi sulle decine, e il numero delle decine aggiungerlo a quello che immediatamente segue.

2. Problema. *Da un numero decimale maggiore sottrarre un' altro numero decimale minore.* Questo problema, pari all' antecedente, può essere spartito in tre casi 1. Quando da una frazione decimale si sottrae un' altra frazione decimale. 2. Quando da un' intero sottraesi una frazione decimale. 3. Quando da un' intero unito a una frazione decimale sottraesi un' altro intero unito anch' esso a una frazione decimale.

In tutti e tre questi casi facciasi la sottrazione come se i numeri fossero interi. Ponendo mente alle opportune sostituzioni

Caso 1.°	Caso 2.°	Caso 3.°
M = 0,78093	M = 7,0000	M = 94,7013
m = 0,59874	m = 0,9875	m = 29,0914
R = 0,18219	R = 6,0125	R = 65,6099

Dimostrazione.

Anche qui la dimostrazione ha quasi il pregio dell'evidenza quasi immediata. Perchè, volendoci volgere all'esempio riportato nel caso 1.° non potendo da $\frac{3}{100000}$ sottrarre $\frac{4}{100000}$ si è preso dal numero che immediatamente segue la frazione $\frac{1}{10000}$, Ma $\frac{1}{10000} = \frac{10}{100000}$. Dunque unendo questi $\frac{10}{100000}$ al $\frac{3}{100000}$, si è poi da $\frac{13}{100000}$ sottratto $\frac{4}{100000}$ e si è avuto per residuo $\frac{9}{100000}$, ovvero 0,00009. Lo stesso raziocinio facciasi sopra ogni altro numero superiore che essendo individualmente minore del numero corrispondente nel sottraento bisogna che riceva aumento dalla cifra che immediatamente segue.

3. Problema. *Moltiplicare i numeri decimali.* La moltiplicazione delle frazioni decimali, anche quando trovansi unite a numeri interi debbe essere eseguita identicamente alla moltiplicazione degl' interi. Purchè però dal prodotto totale sieno spartiti con una virgoletta tante figure decimali, quante trovansi in *amendue* i *fattori*.

Esempii.

Caso 1.°	Caso 2.°	Caso 3.°
F = 0, 783	F = 0, 734	F = 7,29
f = 0, 47	f = 24	f = 8,5
p′ = 5481	p′ = 2936	p′ = 3645
p″ = 3132	p″ = 1468	p″ = 5832
P = 0,36801	P = 17,616	P = 61,965

Dimostrazione.

Che i prodotti debbano situarsi con quell'ordine, col quale dicevamo doversi situare i prodotti successivamente nella moltiplicazione degl' interi, è manifesto: perchè, tenendoci all'esempio riferito nel caso 1., se per 0,07 ch'è l'ultimo numero di f ho multiplicato tutte le cifre di *F*, e ho situato il prodotto: quando poi ho multiplicato 0,4 per le stesse cifre di F, le ho multiplicato per un numero, la cui unità è decupla della

unità che appartiene alla cifra antecedente 7; dunque il prodotto secondo deve incominciare, ed esser situato in corrispondenza alla seconda cifra del primo prodotto. E quindi il terzo prodotto debbe incominciare, ed essere situato in corrispondenza alla terza cifra del primo. E così andate voi discorrendo.

Che dal prodotto totale poi debbonsi separare tante cifre decimali, quante sono in amendue i fattori, ecco la ragione. Se per es. 0,783 0,47; come se si dovesse $\frac{783}{1000} \cdot \frac{47}{100}$. Ed eseguendo la moltiplicazione si avrebbe per prodotto totale $\frac{36801}{100000}$, ovvero 0,36801.

Dell' istesso raziocinio può adoperarsi, anche quando ne' fattori trovansi uniti numeri interi.

Ricordatevi che le dimostrazioni delle frazioni decimali prendonsi dalle proprietà delle frazioni comuni. I decimali non sono che una specie, il cui genere sono le frazioni comuni.

4. Problema. *Dividere un numero decimale maggiore per altro numero minore.* Anche la divisione de' decimali debbe eseguirsi dell'istesso modo che fu eseguita la divisione de' numeri interi. Se non che dal quoziente bisogna che per la caratteristica, ovvero per la solita virgoletta, sieno separate tante cifre decimali, quante contiene dippiù il dividendo sul divisore.

È dunque da avvertire i giovanetti, che nelle divisioni dei decimali, il dividendo supponesi che abbia o uguale, o maggior nnmero di cifre decimali di quelle che abbia il divisore. Di fatti quando non fosse così, bisogna fornirlo di cifre decimali maggiori di numero, aggiungendo zeri alla diritta, come altrove dicevamo.

Esempii.

Caso 1.°

d = 0,32 D = 0,871456
Q = 2.7233
231
74
105
96
00

Caso 2.°

d = 8,3 D = 892,0000
Q = 107,469 62 0
3 90
580
820
73

Caso 3.°

d = 5,17 D = 17,5340
Q = 3,39 2 024
4730
77

Bisogna nondimeno abbadare che del residuo finale non si tiene conto. Se si volesse però continuare la divisione, e perciò metterlo a calcolo, sarebbe necessario aggiungere zeri a destra del dividendo, e continuare la divisione all'infinito.

Dimostrazione.

Tutta la dimostrazione consiste a sapere, perchè dal quoto debbonsi separare tante cifre decimali, quanto è l'eccesso de' decimali del dividendo sopra i decimali del divisore.

Se per es. (0,27):(0,5); ognuna di esse sarà rispettivamente uguale

$$\frac{27}{100} : \frac{5}{10};$$

E in conseguenza sarà $= \frac{27}{100} \cdot \frac{10}{5}$;

ovvero $\frac{27}{5} \cdot \frac{10}{100}$;

ovvero $\frac{27}{5} \cdot \frac{1}{10}$,

ovvero $\frac{27}{50}$,

ovvero $\frac{25}{50} + \frac{2}{50}$.

E riducendo sarà $\frac{1}{2} + \frac{1}{25}$,

ovvero $\frac{5}{10} + \frac{1}{25}$,

ovvero 0,5 ; omettendo la frazione $\frac{1}{25}$.

Ma i decimali del dividendo sono due, quello del divisore è un carattere solo ; e quello del quoziente è anche un solo carattere. Dunque ec.

5. *Frazioni sessagesimali*. Quanto abbiamo detto sulle frazioni decimali potrebbesi facilmente con le opportune variazioni applicare alle frazioni sessagesimali ; cioè a quelle frazioni « che hanno per denominatori le potenze successive del numero 60 ». Noi crediamo inutile dopo tutto quello che abbiamo detto sulle frazioni decimali aggiungere un nuovo trattato che versasse sulle frazioni sessagesimali. Avvertiamo soltanto che siffatte frazioni sono state in uso presso gli Astronomi, e precipuamente presso il Regiomontano (Diz. Enciel. Art. Frazioni sessagesimali). Essi nascono dalle divisioni e suddivisioni de' gradi del circolo in 60^{l} minuti primi, e di ogni minuto primo in $60''$ ec. ec. Onde tutto quello che si sa intorno ai decimali può essere facilmente applicato alle frazioni sessagesimali.

LEZIONE XI.

De' Denominati.

1. *Sistema metrico di una Nazione*. Chiunque desidera rettamente calcolare, è assolutamente richiesto che conosca le unità supreme, e le suddivisioni, secondo che vuole l'uso del paese, dove è dimandato computare. Se conoscete l'Aritmetica come Newton, come Brigio, come Nepero ; e intanto ignorate le diverse unità di misura che servono alla nazione Francese, come presumereste computare secondo gli usi di questa nazione? È vero che l'Aritmetica è scienza *pura*, ch'è quanto dire indipendente da fatti esterni, e da esterne esperienze, e perciò ella è applicabile a tutt' i casi : ma è d'altronde anche vero,

che quando intendesi applicarla, è d'uopo che sappiansi le unità speciali di una nazione, e le loro suddivisioni. Per esempio, quali sieno le unità monetarie e le loro suddivisioni, le unità di peso, di tempo ec. ec. E questo dicesi *sistema metrico di un paese*. E per questa influenza generale che l'Aritmetica tiene, vedesi pure quanto sia utile e vantaggiosa; poichè all'Aritmetico spetta, mutato il sistema metrico, calcolare le unità Francesi, con le unità Inglesi, con le monete Austriache, ec., e adoperare l'Aritmetica alle distanze, alle superficie, ai solidi, a determinare i rapporti di densità, di velocità ec. Non già la scienza si cambia, ma cambiansi i dati della scienza, cioè i numeri.

2. *Attuale sistema metrico nel regno di Napoli*. Quando un giovinetto si è persuaso che nella unità della scienza Aritmetica contengonsi tutte le aritmetiche speciali delle nazioni, il principale suo interesse dev'essere quello di aver come note le unità secondo le quali accingesi a computare. Ma chi, investito del dovere d'insegnare Aritmetica, arrogar si potrebbe mettersi a giorno delle unità speciali, delle quali adoperano le diverse nazioni? Credo necessario e sufficiente però darvi un'idea de' principali sistemi metrici; perchè instruiti nella scienza, e abituati ne' sistemi più necessari per noi, e comuni, vi si rende facilissimo per certa analogia dal buon senso inspirata applicarli ad ogni altro di qualunque si fosse terra, popolo, nazione.

Tre a mio parere sono i sistemi metrici che non debbono essere affatto ignorati da chiunque pretende aver giusto diritto alle scienze, e al commercio. Essi sono 1.° l'attuale sistema metrico del regno di Napoli, cioè vigente fino al 1845: 2.° il nuovo sistema, che emanato il dì 6 aprile 1840 verrà posto in esecuzione nell'anno 1845; 3.° il sistema francese, la cui conoscenza non solo è necessaria pe' rapporti che noi abbiamo avuti con quella nazione, ma ancora perchè esso è indispensabile per l'acquisto delle scienze naturali; le quali pare che sieno tutte trattate sulle basi di quel sistema.

QUADRO SINNOTTICO

Delle più necessarie e conosciute unità.

Misura di lunghezza.

Miglio	Passo	Palmo
1	1000	7 $\frac{1}{3}$

Misura lineare.

Canna	Palmo	Once	Minuti
1	8	12	5

Peso in grosso.

Cantaio	Rotoli	Once
1	100	33 $\frac{1}{3}$

Peso in minuto.

Libbra	Once	Dramme	Scrupoli	Acini
1	12	10	3	20

Moneta.

Ducato	Carlini	Grana	Cavalli
1	10	10	10 (1)

Tempo.

Secolo	Anno	Mese	Giorni	Ore	Minuti primi
1	100	12	30 (2)	24	60' (3)

Misura di capacita' di vino.

Botte	Barile	Caraffe	Pignatelli
1	12	60	3

Misura di capacita' di olio (4).

Salma	Staio	Quarta	Misurelli
1		4	24

Moggio.

Passi 900 ovvero un quadrato il cui lato è di passi 30.

Misura di capacita' per gli aridi.

Tomolo	Mezzette	Quarte	Misure
1	2	2	6.

---

(1) In antico il grano dividevasi in 12 calli.

(2) Il mese di febbraro ordinariamente è di giorni 28; negli anni bisestili è di giorni 29: marzo, maggio, luglio, agosto, ottobre, e dicembre sono di giorni 31.

(3) Ogni minuto primo dividesi in sessanta secondi, e così di seguito.

(4) La misura di olio è varia: alcuni misurano a salma, e altri a botte. In tal diversità la nuova legge del dì 6 aprile 1840 ha ordinato uniformità di misure, e noi ne parleremo qui appresso nel dar conto delle misure calcolate secondo i prescritti della citata Legge.

4. *Brevissima spiegazione del sudetto sistema.* Per capire il quadro di sopra esposto bisogna che ogni unità del numero antecedente si suddivida nelle unità del numero che immediamente segue. Per esempio una canna dividesi in 8 palmi; ogni palmo in 12 once; ogni oncia in 5 minuti. E così ragionisi di ogni altra specie delle surriferite misure.

5. *Breve notizia del nuovo sistema metrico nel regno di Napoli.* La legge del dì 6 aprile 1840 abolisce parte del vecchio, e prescrive per l'anno 1845 un nuovo sistema metrico. Molte opere sono uscite alla luce per rendere popolare e comune questo sistema novello. Anche io mi adopero spiegarlo con quanta facilità mi sarà permesso: affinchè con l'Aritmetica che state studiando rinscirete un dì a risolvere tutt'i problemi solvibili secondo i dati di questo nuovo sistema.

Si è presa per unità, per parte aliquota, per base dell'intero sistema il palmo (1). E perchè esso non fosse vario com'è la mano degli uomini, e fosse invariabile e sicura base del sistema, che si è fatto? Dal quadrante del Meridiano terrestre diviso in 90° (novanta gradi), si è presa la novantesima parte, cioè un grado. Un tal grado si è immaginato diviso in sessanta parti uguali, ognuna delle quali è detta minuto: quindi questo minuto si è imaginato suddiviso in sette mille parti uguali. Ognuna di queste parti si è detta *palmo*. Il palmo dunque può essere contrassegnato dalla seguente espressione frazionaria, cioè dal rotto di rotto $\frac{1}{7000}$ di $\frac{1}{60}$ di $\frac{1}{90}$ del quadrante, ovvero dalla 37800000 dal quadrante. Che è quanto dire il quadrante essere uguale 37800000 palmi.

Stabilito che il palmo è l'unità di misura: non già si è fatta constare la canna di 8 palmi, il palmo di 12 once, e l'oncia di 12 minuti. Ma bensì la canna si è divisa in 10 palmi; ogni palmo in $\frac{10}{10}$; ogni decimo in altri nuovi $\frac{10}{10}$; e così andate voi discorrendo. In una parola si è adottato propriamente il sistema decimale (2).

La nuova legge inoltre prescrive « essere la canna quadrata unità di superficie, e la canna *cuba* essere unità di volume, o di capacità ». E siccome, per quello che appresso esamine-

(1) Articolo 1.° della legge. La base dell'intero sistema, il palmo è la settemillesima parte di un minuto primo del grado medio del meridiano terrestre, ovvero la settemillesima parte del miglio geografico d'Italia, o miglio nautico di sessanta al grado medio del meridiano medesimo. P. 1.

(2) Articolo 2.° Esso sarà diviso in parti decimali, e 10 palmi costitueranno la canna. P. 2.

remo, il quadrato si ottiene multiplicando un lato per sestesso; e il cubo si ottiene, multiplicando il quadrato pel semplice lato: perciò capite, che essendo la canna lineare = 10 palmi; sarà la canna quadrata = 10.10 = 100 palmi quadrati; e la canna cuba finalmente = 100.10 = 1000 palmi cubici (1).

E siccome si è ritenuto il *moggio* per unità di misura agraria: si è prescritto, il moggio constare di 10000 palmi quadrati: cioè il semplice lato essere di 100 palmi lineari (2). Il moggio poi si dividerà e suddividerà in parti decimali (3).

Per unità di misura di capacità in quanto agli aridi si è statuito il *Tomolo* cioè un cubo di tre palmi, il quale si è diviso in 2 mezzette, ogni mezzetta in 2 quarte, ogni quarta poi in 6 misure. Dunque il Tomolo $= \frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{24}{24}$ (mez. quarte misure).

Ogni misura poi deve uguagliare il cubo di un mezzo palmo; cioè di un solido che sia di mezzo palmo nella sua lunghezza, di mezzo palmo nella sua larghezza, di mezzo palmo nella sua solidità. E la misura sia sempre a *raso*, e non già a colmo, come in taluni luoghi promiscuamente facevasi (4).

Per taluni liquidi, per esempio vino, aceto, acqua, si è stabilito il barile per unità di misura di capacità. E tolta la salma ed altra misura adottata per tali liquidi in diversi luoghi del regno, si è diviso il barile in 60 caraffe. E si è sperimentato che la capacità del barile è rappresentata da un cilindro avente per base un cerchio del diametro di un palmo, e per altezza una linea di palmi tre.

Quindi fatta la botte constare di barili dodici, si è Matematicamente dimostrato e dedotto, che la capacità della botte è uguale a un' altro cilindro, avente per base un cerchio del diametro di palmi tre, e per altezza una linea di palmi quattro (5).

---

(1) Articolo 2.° La canna lineare, la canna quadrata, e la canna cuba sono le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di solidità per tutti gli usi. La prima è uguale a dieci palmi lineari, la seconda a cento palmi quadrati, la terza a mille palmi cubi. Un palmo è uguale a metri 0,26455 (che è quanto dire 264^{mm}, 55).

(2) Articolo 3.° della sudetta legge. L' unità superficiale delle misure agrarie sarà il moggio di diecimila palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia uno de' lati cento palmi, o canne dieci. P. 1.

(3) Esso sarà diviso in parti decimali. P. 2.

(4) Articolo 4.° della legge. Il *Tomolo* è l' unità delle misure di capacità per gli aridi. Esso equivale a tre palmi cubi, e si divide in due mezzette, o in quattro quarte, o pure in ventiquattro misure, ciascuna delle quali uguaglia il cubo del mezzo palmo.

La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso*, e non a *colmo*.

(5) Articolo 5.° della legge. Il *Barile* è l' unità delle misure di ca-

E siccome, per quello che nella Stereometria dimostrasi, la solidità del cilindro si ottiene nel prodotto della base per l'altezza, e la base poi si ottiene multiplicando la circonferenza per la quarta parte del diametro: essendosi dunque supposto $D = 1$; sarà la periferia, ovvero $P = 3,14159265$ (1). E in conseguenza il cilindro $C = 3,14159265 . \frac{1}{4} . 3$. Ed eseguite le operazioni sarà il cilindro (barile) $= 2,35619448$; cioè uguale a due palmi cubici e 356$^{milles.}$, omettendo gli altri decimali come quantità da non tenerne conto.

Or dimandasi, perchè alle condizioni supposte, essendo la botte composta di 12 barili, essa dev'essere eguale alla capacità di un cilindro avente tre palmi di diametro, e quattro palmi di altezza?

Eccone la ragione. I cilindri sono tra essi nella ragion composta de' quadrati de' diametri, e delle altezze. Contrassegnando con B la botte, con b il barile; con D il primo, e con d il secondo diametro, con A la prima, e con a la seconda altezza, sarà

$$B : b :: D^2 : d^2 . A : a.$$

E sostituendo i rispetti valori, sarà

$$B : b :: 9 : 1 . 4 : 3.$$

E componendo le ragioni, sarà

$$B : b = 36 : 3.$$

E riducendo la ragione ultima, sarà

$$B : b :: 12 : 1,$$

---

pacità per alcuni liquidi, come il vino, l'aceto, l'acqua ec. e si divide in 60 caraffe.

Esso equivale a un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi di altezza.

La Botte si compone di dodici barili; ed è perciò uguale a un cilindro retto di tre palmi di diametro, e quattro palmi di altezza.

(1) Molti matematici si sono adoperati nel conoscere quanti diametri componevano la periferia del cerchio; ch' e quanto dire, determinare la ragione del diametro alla periferia.

Senza far parola di Archimede, di Mezio, di molti altri, noi abbiamo statuito che $D : P :: 1 : 3,14159265$.

Avvertiamo però, che cambiando questo rapporto, si vedrà sempre differenza ne' risultamenti finali.

ovvero

$$\frac{B}{b} = \frac{12}{1}.$$

Dunque la botte avente la base e l'altezza supposta contiene dodici volte il barile anche della base, e della condizione supposta.

In quanto all'olio poi si è stabilito doversi misurare a peso, e non già a volume: val quanto dire a cantaio, rotola, ed a frazioni decimali.

Se non che per facilitare il commercio a minuto potrà adottarsi la misura di capacità, formando però misure cilindriche corrispondenti al peso di olio che debbono contenere (1). Ed affinchè sia posta a calcolo anche l'influenza che l'atmosfera possa avere sopra siffatto liquido, si è stabilito che le misure per olio fossero fatte alla temperatura di 20° del termometro centigrado (2).

Circa il peso poi si è stabilito il rotolo come unità di misura, e il trappeso e la millesima parte del rotolo, e l'oncia corrisponde a tre centesimi di rotolo (3). Sicchè due cantaia, settantotto rotola, un'oncia, e sette trappesi, scrivonsi $\overset{\text{rot.}}{2}\overset{\text{di rot.}}{78,037}$.

---

(1) Articolo 6.° della legge. L'olio sarà misurato sempre a peso, a cantaia, a rotolo, ed a frazioni decimali di rotolo. Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità: le misure dovranno essere di figura cilindrica e corrispondenti al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20° (venti gradi) del termometro centigrado.

(2) « Il termometro, dice il Cagnoli nelle rinomate *Notizie Astronomiche*, è un istrumento ch'è nelle mani di tutti, ma che non da tutti s'intende: il perchè ne direm due parole di spiegazione per cui bisognasse ». Esso è un istrumento inventato per misurare i diversi gradi del calore: ed è perciò detto Termo-metro. Consiste in un tubo di vetro che va a finire in una palla ove si contiene o mercurio, o spirito di vino. Secondo che il calore aumenta, o diminuisce; aumenta o diminuisce del pari il volume del mercurio: e in conseguenza o si alza o si abbassa la colonna del mercurio lungo il tubo. Da tale innalzamento o abbassamento conoscesi lo stato o la temperatura dell'aria. Presi dunque due punti, cioè quello della colonna del mercurio quando l'acqua distillata incomincia ad agghiacciare, e l'altro quando distillata incomincia a bollire, si è in parti aliquote ed uguali divisa la linea che è intercetta. Reaumeur la divise in ottanta parti, e altri in cento, secondo che la palla conteneva mercurio, o spirito di vino (Diz. Encicl. art. Termometro): Ciò che ha dato luogo al Termometro centigrado.

(3) Tanto è dire $\overset{\text{oncia}}{1} = \frac{\overset{\text{rot.}}{3}}{100}$; quanto è dire $\overset{\text{once}}{100} = \overset{\text{rot.}}{3}$.

Onde credo opportuno presentarvi la seguente

TAVOLETTA.

		rot.
Il cantaio	=	100,000
Il rotolo	=	1,000
L' oncia	=	0,03
Il Trappeso	=	0,001
L' acino	=	0,00005.

Negli usi farmaceutici però è tollerato l'uso della libbra con le antiche suddivisioni di essa.

Molti Matematici, ed uomini in ogni antica e recente disciplina dottissimi hanno messo a stampa parecchie opere per rendere popolare e comune il nascente sistema. Io amerei che non solo foste intendenti di quella pratica, ma ancora di quelle dottrine; sicchè riusciate non solo ad intendere, ma ancora a praticamente eseguire. Intanto dopo avervi dato notizia del sistema ch' è per adottarsi, passo a dire qualche parola sul sistema metrico francese: affinchè conosciuti nelle basi, e nei rapporti, possiate convertire le unità di uno in quelle dell' altro, e viceversa.

LEZIONE XIII.

SISTEMA METRICO FRANCESE.

1.° *Ineguaglianza e disparità dell' antico sistema metrico francese.* Anchè un dì la Francia non aveva uniformità di misure; e sentiva quanta inconvenienza e nocumento derivava perciò al commercio. Di fatti in Aix e in molti altri paesi la canna $= 1,9887^m$: in Arles $= 2,0472^m$: in Marsiglia $= 2,0127^m$: in Avignone $= 1,9833^m$. Dippiù un palmo in Salon $= 0,2488^m$: in Terrascona era $= 0,2466^m$: in Roquavaire $= 0,2571$. Inoltre l' auna in Marsiglia $= 1,1884^m$: e l'auna della Capitale non era nelle consuetudini di taluni dipartimenti. Questa ineguaglianza di misure diede occasione a fondere un nuovo sistema, e renderlo universale.

2.° *Origine del nuovo sistema francese, sua base, e suoi Autori.* Nel bisogno che sentiva la Francia di formare un nuovo sistema metrico, sentiva pure la necessità di ricavarlo da certa quantità invariabile nella natura, la quale esser dovesse come base dell' intero sistema. Preso dunque il meridiano terrestre cioè un circolo massimo che passa pe' poli, e ha per diametro il diametro istesso della terra, fu diviso in quattro parti, ed

ognuna è detta *Quadrante*: l'arco del quadrante fu diviso in 5130740 parti, ognuna delle quali fù detta *tesa*.

Ogni tesa fu suddivisa in 6 piedi.
Ogni piede fu suddiviso in 12 pollici.
Ogni pollice fu suddiviso in 12 linee.

Sicchè contrassegnando con A l'arco del meridiano, con P il piede, con p il pollice, con l la linea

$$A = 5130740^t.$$

Convertendolo in piedi

$$A = 5130740^t.6^p = 30784440^p.$$

Convertendolo in pollici

$$A = 30784440^p.12^p = \ldots. 369413280^p.$$

Convertendolo in linee

$$A = 4432959360.$$

Non volgari ingegni, ma sommi, lavoravano alla costruzione di questo sistema. Tra tanti altri preclarissimi uomini lavoravano la Condamine, Lacaille, Masson e Dixon, Biot, Boscowich, Arago, Delambre, Cassini ec. ec. Tanto che nel 1799 questo sistema fu presentato e approvato da un consesso di Scienziati: tra quali trovaronsi la Place, la Grange, Brisson, Borda, Ciscar Spagnuolo, Fabroni Mascheroni e altri Italiani; Traller, Svizzero; Bagge, Danese, Wan-stwiden ed altri Olandesi.

3.° *Idea del metro.* Ma quale quantità que' sommi ingegni dissero *metro?* la diecimillionesima parte del quadrante del meridiano, cioè della distanza dal polo all'Equatore (1). Sicchè contrassegnando con Q il quadrante, con M il metro, con 10000000 il numero preso per divisore, sarà $M = \frac{Q}{10000000}$

(1) Avvertite che come la distanza dal polo pel quadrante all'Equatore misurata sul meridiano di Parigi si è stabilita essere uguale a

$$5130740^t$$

così il raggio equatoriale è uguale a

$$3261443^t$$

e il Semiasse, ovvero il raggio del meridiano è uguale a

$$3271203^t.$$

e sostituendo a Q il valore di 5130740^t, sarà $M = \frac{5130740^t}{10000000}$.

E perchè in questo rotto essendo il numeratore minore del denominatore, si ha un quoto minore della tesa: perciò le tese si sono convertite in piedi, e si è detto $M = \frac{30784440^p}{10000000}$.

E riducendo, sarà

$$M = \frac{3078444^p}{1} = 3^p,078444.$$

E perchè il piede è = 12 pollici, perciò riducendo sarà $M = 36^p,9413$, omettendo qualche decimale.

E perchè ogni pollice = 12 linee, perciò riducendo sarà $M = 443^l,296$ con qualche infinitesimale di divario.

4.° *Diverse specie di misure.* Preso dunque il metro come base del nuovo sistema lo applicarono alle misure di volume, e di peso, cioè al *litro*, e al *grammo*. Quindi adottate le voci

Myria, Kilo, hecto, déca, dèci, centi, milli.

$$10000,\ 1000,\ 100,\ 10,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000}.$$

formarono così i decupli e poi decupli del metro del litro e del grammo; come le parti decime, e poi decime; e dissero per esempio

Miriam., Chilom., Ectom., Decam., Met., Decim., Centim., Millim.

$$10000^m,\ 1000^m,\ 100^m,\ 10^m,\ 1^m,\ \frac{1^m}{10},\ \frac{1^m}{100},\ \frac{1^m}{1000}.$$

Sicchè $79834^m,6789$ è uguale

7 miriametri
9 chilometri
8 etometri
3 decametri
4 metri
6 decimetri
7 centimetri
8 millimetri
9 decimillimetri.

Il *litro* è uguale a un cubo, il cui lato è la decima parte del metro, ovvero un *decimetro*.

Il *grammo* è uguale a un cubo di acqua distillata nello stato di sua massima densità (1), il cui lato è la centesima parte del metro, ovvero un *centimetro*.

Finalmente omettendo parlare dell'Are, che è l'unità di superficie, diciamo qualche cosa dell'unità monetaria francese.

L'unità monetaria presso i francesi è il *franco*, ovvero un pezzo che pesa cinque *grammi* di argento: quindi relativamente a questa unità hanno calcolato con decimi, e centesimi; omettendo le parti millesime, ec. come minuzie da non tenerne conto (2).

LEZIONE XIV.

Continuazione sulla Dottrina de' Denominati.

1.° *Paragone de' tre sistemi già di sopra esposti.* Chiunque volesse dare uno sguado al tutto insieme che io mi sono provato rendervi chiaro e patente su i diversi sistemi metrici che vi possono riguardare; cioè quello ch'è per cessare, quello ch'è per sorgere tra di noi, e finalmente il sistema metrico francese, che pare tenere universalità d'influenza in tutte le naturali discipline; immediatamente vedesi al caso di dedurre, che tanto il sistema nuovo, quanto il sistema metrico francese hanno molta affinità col sistema decimale; e in conseguenza che chi brama disbrigarsi con onore nel calcolare, è uopo che nel trattato de' decimali sia maestrevolmente versato. Cambieranno le unità, il metro e la canna, il litro e il tomolo, il grammo e il rotolo: ma in entrambi questi sistemi entreranno come parte essenziale le frazioni decimali; talmente che queste frazioni decimali daranno forma a molte operazioni tanto nell'uno quanto nell'altro sistema. Non può dirsi però lo stesso de' numeri propriamente denominati, cioè spettanti al sistema ch'è per essere abolito. Non solo che sono diverse le unità, come

---

(1) Le *maximum* de condensation de l'eau correspond, par une exception remarquable, à une température de 4 degrés centigrades au-dessus de zero. De sorte que le volume d'une même masse d'eau augmente, lorsque la chaleur augmente ou diminue à partir de 4 degrés centigrades au-dessus de zero. Raynaud, Arithmétique page 105. Remarque.

(2) Il franco tra noi non ha prezzo fisso e determinato: ma queste varianze dipendono dal commercio, ovvero dagli agenti di cambio. Troverete che un franco or vale grana 24 de' nostri, or 23 $\frac{1}{2}$, or anche 23.

per es. il tomolo e il ducato: Ma sono indipendenti da ogni rapporto decimale le suddivisioni delle unità costituenti una medesima specie: Per esempio la canna dividesi in 8 palmi, il palmo in 12 once, l'oncia in 5 minuti. Or voi a quali spetta sovente computare sulle misure Ebree, Egizie, Greche, Romane, vi troverete maggiormente nel dovere di non far perdere la memoria delle consuetudini de' padri vostri: e mentre all'identità decimale avete portato e il sistema nuovo e il sistema francese, a voi spetta, esaminare le diverse forme alle quali può essere rapportato l'antico sistema.

2.° *I denominati sono altrettanti numeri interi uniti a rotti di diverso denominatore.* La prima osservazione che pare a me doversi fare su i numeri denominati è, che essi sono numeri interi uniti a rotti di diverso denominatore. Talmente che come senza denominatori scrivonsi le frazioni decimali, e intanto il denominatore è sempre sottinteso: così del pari senza denominatori scrivonsi i denominati, ma debbonsi però certi loro propri denominatori sempre sottintendere. La quale osservazione quanta luce recherà a moltissime dottrine, vedremo tra poco.

Difatto se si prenda il denominato $3^{can.}$, $5^{pal.}$, $7^{onc.}$, $2^{min.}$; potrà essere convertito nelle seguenti espressioni partitamente

3 canne

$\frac{5}{8}$ di canna

$\frac{7}{12}$ di $\frac{1}{8}$ di canna ovvero $\frac{7}{96}$

$\frac{2}{5}$ di $\frac{1}{12}$ di $\frac{1}{8}$ di canna ovvero $\frac{2}{480}$.

Invece dunque di dire $3^{can.}$, $5^{pal.}$, $7^{onc.}$, $2^{min.}$, si può dire

$$3 + \frac{5}{8} + \frac{7}{96} + \frac{2}{480} \text{ di canna.}$$

Similmente dimostrasi che invece di dire per esempio 5^{botti}, $7^{bar.}$, $5^{caraf.}$ si può dire $5^{bot.} + \frac{7}{12}$ di botte $+ \frac{5}{60}$ di $\frac{1}{12}$ di botte, ovvero $\frac{5}{720}$ di botte.

E così andate discorrendo d'ogni altro.

Nè credo già per altro, se non per questo, essere stati sempre tra di noi in generale detti *denominati* i numeri semplificati ne' pesi, nelle misure ec. ec.

3.° *I denominati si possono considerare come puri interi.* Anzi se mai taluno s' infastidisse dalle diverse specie di unità che concorrono in un denominato qualunque, egli può avere un' altro vantaggio, ch' è quello di considerare i denominati come altrettanti *interi*, purchè diasi la pena di ridurre tutto alla minima specie. Se a modo di esempio mi sia dato, il denominato $3^{can.}$, $5^{palm.}$, $7^{onc.}$, $3^{min.}$, io potrò ridurre tutto alla minima specie, cioè

$$
\begin{array}{r}
3^{can.} \\
8^{pal.} \\
\hline
24^{pal.} \\
\text{ag. } 5^{pal.} \\
\hline
29^{pal.} \\
12^{onc.} \\
\hline
58 \\
29 \\
\text{ag. } 7^{onc.} \\
\hline
355^{onc.} \\
5^{min.} \\
\hline
1775^{min.} \\
\text{ag. } 3^{min.} \\
\hline
1778^{min.}
\end{array}
$$

Sicchè $3^{can.}$, $5^{pal.}$, $7^{onc.}$, $2^{min.}$

sono uguali a $3 + \frac{5}{8} + \frac{7}{96} + \frac{2}{480}$ di canna

sono uguali a $1778^{min.}$.

4.° *Ridurre i denominati dalla minima alla specie più alta che sia possibile.* E quanto si è detto nell' antecedente paragrafo vi autorizza poter convertire i denominati dall' ultima alla specie che si può. Cioè dividendo il numero dato per la specie prossima, il quoto darà le unità della specie prossima; e il residuo, se mai ve ne sarà, indicherà le unità spettanti alla specie data. Sieno per esempio da ridursi alle unità superiori

24557 minuti, farebbesi

$$\frac{24557^{\text{min.}}}{5^{\text{min.}}} = 4911^{\text{onc.}} + 2^{\text{min.}}$$

$$\frac{4911^{\text{onc.}}}{12^{\text{onc.}}} = 409^{\text{pal.}} + 3^{\text{onc.}}$$

$$\frac{409^{\text{pal.}}}{8^{\text{pal.}}} = 51^{\text{can.}} + 1^{\text{pal.}}$$

Sicchè $24557^{\text{min.}} = 51^{\text{can.}}, 1^{\text{pal.}}, 3^{\text{onc.}}, 2^{\text{min.}}$.

Dell' istesso modo potrete determinare quante botti, e quanti barili formeranno 22759 caraffe; e quanti anni formeranno 227,580 ore ec. ec.

5.° Il Professore potrà in siffatte conversioni esercitare i giovinetti: affinchè non si sgomentino in operazioni, che sebbene a principio sembrano ardue e difficili, pure dopo qualche reiterazione addivengono puramente abituali; se non si giunge pure ad eseguirle anche per opera di pura astrazione: come sappiamo del Wallis, che erasi abituato ad estrarre per mera astrazione la radice quadrata da cinquanta e più cifre.

LEZIONE XV.

Continuazione sulla dottrina de' Denominati.

1.° *Sommare i denominati.* 1.° Si scrivano i denominati uno in corrispondenza dell'altro, in modo però che le unità inferiori siano corrispondenti le une alle altre. 2.° Si trovi la somma delle minime; e fatto, se ve n'è, il riporto delle unità prossime, si scriva l'eccesso; o se non ve n'è riporto, si scriva tal quale la somma. Così si proceda fino alle ultime unità date.

Che se poi i denominati appartenessero alla teorica de' decimali, la somma facciasi pari a quella che dicevamo de' rotti decimali.

Esempii.

Vino.

	bot.	bar.	car.
A =	75,	11,	59
B =	983,	07,	13
C =	7,	09,	53
S =	1067,	05,	05

Moneta.

	duc.	gra.	cal.
A =	173,	99,	01
B =	97,	18,	03
C =	988,	73,	07
S =	1259,	92,	01

Misura lineare del nuovo sistema.

	palm.	
A =	183,	572
B =	98,	072
C =	934,	732
S =	1216,	376

Secondo il cadente sistema.

	can.	pal.	onc.	min.
A =	183,	5,	7,	2
B =	98,	0,	7,	2
C =	334,	7,	3,	2
S =	616,	5,	6,	1

Tempo.

	sec.	an.	mesi	giorni	ore	min. primi	
A =	7,	93,	11,	29,	23,	56′,	57″
B =	2,	82,	10,	13,	17,	13′,	49″
C =	3,	90,	07,	27,	19,	52′,	37″
S =	14,	67,	06,	11,	13,	03′,	23″

2.° *Da un numero denominato maggiore, sottrarre un'altro denominato omogeneo, ma minore.* 1.° Si scriva uno sotto l'altro denominato, il minore sotto il maggiore, e sotto di essi si tiri una linea. 2. Dalle infime unità del numero maggiore sottraggansi le corrispondenti unità del numero minore, se si può: altrimenti dalla cifra che immediatamente segue nel numero superiore prendasi una unità, e ridotta alla specie che si sta sottraendo, si faccia la sottrazione. 3.° In tal caso però bisogna che il numero seguente intendasi diminuito di quella unità, che già si è presa. E così facciasi fino alle unità supreme. In tal modo si avrà l'eccesso del numero maggiore sul minore, cioè il residuo.

Che se poi i denominati trattansi col sistema decimale, la sottrazione abbia luogo secondo che dicevamo doversi operare nella sottrazione de' decimali.

Esempii.

Moneta.	Vino.
M = 783 , 02 , 07	bot. bar. car. M = 96 , 06 , 07
m = 538 , 98 , 09	m = 78 , 09 , 56
R = 244 , 03 , 08	R = 17 , 08 , 11

Misura lineare antica.	Misura lineare nuova.
can. p. on. m. M = 937 , 0 , 07 , 1	palmi M = 873 , 23503
m = 598 , 7 , 11 , 4	m = 598 , 65879
R = 338 , 0 , 07 , 2	R = 274 , 57624

3.° *Osservazione.* Sarebbe inutile aggiungere per le prôve della somma e della sottrazione dottrine identiche a quelle che universalmente si statuiscono per la somma, e la sottrazione degl' interi. Quelle dottrine sono applicabili anche a questi casi particolari: Avendo però considerazione a tutto ciò ch'è richiesto ne' numeri denominati, come costituiti da ordini di diverse unità.

4.° *Multiplicare i denominati.* Questo problema abbraccia tre casi. Perchè 1.° o i denominati sono tali, che tutti e due i numeri che si multiplicano si possono considerare come numeri interi: 2.° o sono tali, che uno di essi comprende anche unità di ordine inferiore, e l'altro si può tenere in conto di numero intero ed astratto: 3.° o tutti e due sono denominati, cioè contengono entrambi i fattori ordini di unità inferiori.

Nel 1.° caso il prodotto si ottiene, moltiplicando i numeri dati, come dicevamo nella moltiplicazione degl' interi.

Sieno per esempio da moltiplicarsi 783 canne di panno, per ducati 12 ogni canna.

$$\begin{array}{r} F = 783 \\ f = 12 \\ \hline p' = 1566 \\ p'' = 783 \\ \hline P = 9396 \end{array}$$

E lo stesso dicasi d' ogni altra operazione riducibile a questo primo caso.

Nel 2.° caso. 1.° Si spartiscano le unità ultime che si considerano come interi. 2.° Dalle altre si caccino tanti rotti co' ri-

spettivi denominatori. 3.° Si multiplichino gl' interi, e si sommino in uno tutti i prodotti. 4.° Al prodotto avuto si aggiunga il valore di tutt' i rotti parziali del denominato già dato. Siano per esempio per ducati 12 da moltiplicarsi, 17 canne, 7 palmi, 5 once, 3 minuti per ducati 12 ogni canna.

Esempio.

$$F = 17^{can.},\ 7^{pal.},\ 5^{onc.},\ 3^{min.}$$
$$f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 12$$

osservo che $17 \cdot 12 = 204,\ 00,\ 0$

$$^{palmi}\ 7 = \frac{7}{8} \text{ di canna} = \frac{7 \cdot 12}{8} = 10,\ 50,\ 0$$

$$^{onc.}\ 5 = \frac{5}{96} \text{ di canna} = \frac{5 \cdot 12}{96} = 66,\ 8$$

$$^{min.}\ 3 = \frac{3}{480} \text{ di canna} = \frac{3 \cdot 12}{480} = 07,\ 6$$

Sicchè il Prodotto totale $= 215^{duc.},\ 24^{gr.},\ 2^{cav.}$

Nel 3.° caso, cioè quando tutti e due i denominatori constano di unità inferiori. Si operi come nel 2.° caso, avuto soltanto riguardo a valutare i rotti secondo il nuovo valore che acquistano relativamente al secondo fattore, che in questo caso supponesi anche diviso in unità di specie inferiori.

Siano p. e. da multiplicarsi per ducati $19\frac{3}{4}$, canne 429, 6 palmi, once 9, minuti 3.

$$F = 429^{can.},\ 6^{pal.},\ 9^{onc.},\ 3^{min.}$$
$$f = 19\tfrac{3}{4}$$

Somme parziali 8151 : 00,0 prodotto di 429 per 19.

Agg... 321 : 75,0 prodotto di 429 per $\frac{3}{4}$

Agg... 14 : 81,3 valore di 6 pal. ovv. $\frac{6}{8}$ di canna

Agg... 1 : 85,1 valore di 9 once $= \frac{9}{96}$ di canne

Agg... 0 : 12,4 valore di 3 min. $= \frac{3}{480}$ di canne.

Somma totale $= 8489 \cdot 53,09$

Avvertimento. 1.° Si sono omesse le frazioni meno di assai del picciolo.

Avvertimento. 2.° Il Professore intrattenga i giovani nella soluzione di problemi identici al secondo, e al terzo caso.

5.° *Dividere uno per altro numero denominato.* Questo problema abbraccia quattro casi; 1.° Quando il dividendo è numero denominato, ma non avente unità di specie inferiori; e il divisore è poi un numero anche intero, ma astratto; come quando 17 ducati si debbono dividere per 7. Il quoto in tal caso esprime parte del dividendo. 2.° Quando il dividendo è denominato avente unità d' inferiori specie ed il divisore è poi un' intero, anche astratto come quando per esempio 17 botti, 5 barili, e 23 caraffe debbonsi dividere per 23. Il quoto in tal caso anche esprime parte del dividendo. 3.° Quando il dividendo e il divisore sono denominati della medesima specie, ed entrambi aventi unità minori: come quando si dice che una canna importa 17 ducati 99 grana, e 3 calli si dimanderebbe quante canne darebbe la somma di ducati 2934: 39, 11. Il quoto in tal caso esprime un numero diverso dal dividendo, ed in conseguenza anche dal divisore. 4.° Quando così il dividendo, come il divisore sono denominati aventi unità minori, ma uno di specie diverso dall' altro: come quando 36 canne, 7 palmi, 5 once, e 3 minuti essendo costati ducati 173, grana 95, cavalli 7 si vorrebbe sapere il valore di una sola canna.

Noi quì ci occupiamo de' problemi del primo, e del secondo di questi casi: e in quanto agli altri ne parleremo infine del trattato delle proporzioni.

Nel primo e nel secondo caso si divida il dividendo pel divisore, secondo che si è eseguito nella divisione degl' interi: 2.° sempre che il dividendo non può essere diviso, si riduca nelle unità prossimamente inferiori. 3.° Avvertendo di mettere nel quoto un zero sempre che il divisore non entra nel dividendo.

Divisore	Dividendo
	moneta
17	234: 17, 5
Quoto = 13: 77, 5	17
	64
	51
	13
	1300 ridotti a grana
	17
	1317
	119
	127
	119
	8
Riduc. a calli	10
som.	80
agg.	5
som.	85
	85

LEZIONE XVI.

Delle Potenze.

1.° *Che cosa sia Potenza.* Potenza dicesi una quantità moltiplicata per sè stessa un determinato numero di volte.

2.° *Che cosa sia quadrato.* I giovanetti per quanto riescono ad avere chiara idea del quadrato, sempre che loro si fa vedere rappresentato, od espresso sopra una superficie: per altrettanto a me pare che non giungono a formarsi l'idea distinta del quadrato, sempre che si volesse per via di numeri mostrar loro questa semplicissima idea. Quindi si persuadono senza le opportune distinzioni, che il quadrato di uno è uno, il cubo di uno è uno, ec.

Il quadrato è sempre relativo a una superficie; e perciò per misurarlo, dovrebbero essere conosciute le due dimensioni. Ma perchè quanta è la lunghezza, altrettanta è la larghezza: perciò il quadrato si misura moltiplicando un lato per sè stesso. Mentre dunque il numero delle parti costituenti il lato del quadrato esprimono per esempio solamente lunghezza, il numero costituente le parti della superficie quadrata, cioè del prodotto, esprimono lunghezza e larghezza.

Questa considerazione vi mena a distinguere l'1 ch'è radi-

ce, dall' 1 ch' è quadrato: Il primo è per esempio un palmo di lunghezza, il secondo è superficie quadrata di un palmo.

E così discorretela del cubo. Dunque è falso che il quadrato, il cubo ec. di 1 sono l' istesso 1: ma debbe dirsi che un palmo di lunghezza, ha per quadrato la superficie di un palmo nella sua lunghezza, e di un palmo nella sua larghezza; parimenti è falso che il cubo di 1 è l'istesso 1; ma debbe dirsi che un palmo di lunghezza ha per cubo un solido che ha un palmo di lunghezza, un palmo di larghezza, un palmo di profondità.

Ciò premesso è facile capire come in noi derivi l' idea di quadrato: ella nasce sempre che immaginiamo che le unità costituenti un numero sieno moltiplicate per sè stesse. Così il quadrato di $7 = 49$; il quadrato di $8 = 64$ ec.

3.° Niente meno difficile dunque, quanto conoscere la misura di un quadrato, avendo solamente per cognito un solo suo lato. Sia per es. il n.° 16; sarà $(16)^2 = 256$. E da quello che io vi diceva capite pure che le unità costituenti il prodotto 256 non sono omogenee alle unità costituenti il 16, quantunque nel medesimo calcolo pare a giovanetti che sieno omogenee: le unità del 256 sono unità quadrate, quelle del 16 sono unità lineari.

4.° *Lemma fondamentale.* Se un numero è diviso in qualunque modo, il quadrato che nasce da tutto il numero, è uguale alla somma dei quadrati delle parti, unita ai prodotti del doppio d' ogni parte per ogni altra. Sia per esempio

$$9 = 2 + 3 + 4.$$

Sarà

$$(9)^2 = (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (2 \times 2 \times 3) + (2 \times 2 \times 4) + (3 \times 2 \times 4).$$

Che è quanto dire

$$\begin{array}{rr} & 4 \\ & 9 \\ 81 = & 16 \\ & 12 \\ & 16 \\ & 24 \\ \hline 81 = & 81 \end{array}$$

La dimostrazione rigorosa di questo lemma si rimette all'*Algebra*, poichè colla sola Aritmetica riuscirebbe assai complicata. Esso è tale nella dottrina dei quadrati numerici, qual'è la somma de' numeri semplici nel trattato degl' interi.

Dunque per esempio se vuolsi il quadrato di 234, esso sarà

diviso naturalmente nel valore delle sue cifre

$$200 + 30 + 4.$$

Sicchè secondo la formola antecedente

$$(234)^2 = (200)^2 + (30)^2 + (4)^2 + (200 \times 2 \times 30) + (200 \times 2 \times 4) + (30 \times 2 \times 4)$$

ovvero $$(234 \times 234) = \begin{cases} 40000 \\ 900 \\ 16 \\ 12000 \\ 1600 \\ 240 \end{cases}$$

ovvero $$54756 = \overline{54756}$$

Or se le medesime quantità le disponete in modo, che dopo ogni quadrato scriviate il doppio prodotto di un numero nell'altro che immediatamente segue, le suddette quantità dovrebbero essere situate nel seguente modo

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 12000 \\ 900 \\ 1840 \\ 16 \\ \hline 54756 \end{array}$$

Si avrà sempre

E se si cassano gli zeri, si potranno scrivere nel seguente modo

$$\begin{array}{r} 4 \\ 12 \\ 9 \\ 184 \\ 16 \\ \hline 54756 \end{array}$$

5.° In tali operazioni però bisogna volger l'attenzione a due cose: 1.° che ogni prodotto seguente dovrà sopravanzare l'antecedente di un carattere a destra; perchè consta del numero antecedente moltiplicato per quello che immediatamente segue. 2.° che ogni quadrato non eccede mai il doppio delle cifre della radice.

6.° *Regola generale.* Se avete ben capita la formazione de' quadrati numerici, è facilissimo ricavare la seguente regola. « Un » numero si eleva a quadrato. 1.° Se trovasi il quadrato della » prima cifra. 2.° Ad esso aggiungasi il prodotto della prima » nella seconda, in modo che questo secondo prodotto ecceda

» il primo di un carattere a destra. 3.° Si aggiunga il quadrato
» della seconda, anche eccedente il prodotto antecedente di
» una cifra a destra, e lo stesso facciasi in ogni prodotto.
» 4.° Il prodotto delle due prime nella terza. 5.° Il quadrato
» della terza cc. ec.

7.° Quindi è notevole e degna di attenzione la differenza de' quadrati; perchè impariate a vedere quanto sia maggiore di quella de' numeri semplici. Difatti $6 < 7$ di 1: mentre poi avviene che $(6)^2 < (7)^2$ di $12 + 1$, cioè del doppio del numero dato, e di 1 dippiù: quasi che $(7)^2 = (6 + 1)^2$.

8.° Sicchè un rotto elevasi a quadrato trovando un' altro rotto che ha per numeratore il quadrato del numeratore dato, e per denominatore il quadrato del denominatore dato. Onde

$$\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \left(\frac{49}{81}\right)^2.$$

9.° Un' intero unito a rotto si eleva a quadrato, se l'intero e rotto si riduca a rotto solo, e quindi dopo aver operato secondo ch' è prescritto nel paragrafo antecedente, sieno fatte le dovute riduzioni. Sia per esempio

$$\left(17\frac{3}{4}\right)^2.$$

Riducendo sarà $= \left(\frac{71}{4}\right)^2.$

E operando sarà $= \frac{5041}{16}$. E riducendo il rotto spurio sarà uguale $315\frac{1}{16}$.

10.° Che se poi si volesse elevare a quadrato un numero decimale, si consideri come intero; però dal prodotto finale sieno separate tante cifre decimali quante ne dinota il doppio de' decimali della radice. Se per esempio si debba

$$\begin{array}{l}
(13,73)^2 \\
\quad 1 \\
\quad 06 \\
\quad\ 09 \\
\quad\ 182 \\
\quad\quad 49 \\
\quad\quad 822 \\
\quad\quad\quad 09 \\
\hline
\quad 1885129
\end{array}$$

E perciò $= 188,5129$.

LEZIONE XVII.

1.° *Che cosa sia cubo.* Il cubo è il prodotto del quadrato per la radice di esso. Così per esempio

$$3 \times 3 = 9. \text{ Or } 9 \times 3 = 27;$$

dunque il quadrato 9 multiplicato per la sua radice ch'è 3, dà per prodotto 27; il numero 27 dicesi cubo del 3.

Non perdete di mente queste principalissime idee: perchè rendesi veramente disdicevole, se non turpe, vedere che i giovanetti, appartenenti a scuole di Fisica, dimandati del quadrato di 3 rispondevano ch'era 6; e del cubo di 4 rispondevano ch'era 12. E perchè all'attenzione che potete non avere, è canone Logico, che per rimanervi impresse le idee, fa d'uopo che le espremiate con segni sensibili: eccovi un piccolo quadro, che vi offre registrati in corrispondenza i numeri esprimenti le Radici, i Quadrati, e i Cubi della serie naturale, e semplice; perchè come aveste a formarvi quelli d'ogni numero, dopo che abbiamo detto del quadrato, parliamo al presente della formazione del cubo.

Radice.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9
Quadrato.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81
Cubo.	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

2.° *Lemma fondamentale.* Se un numero è diviso in due parti comunque; il cubo corrispondente al tutto, è uguale alla somma de' cubi delle parti, unita al triplo quadrato dell'una nell'altra, e del triplo quadrato dell'altra nell'una.

Sia per esempio $9 = 5 + 4$. Sarà

$$(9)^3 = (5)^3 + (4)^3 + 3(5)^2 \times 4 + 3(4)^2 \times 5.$$

Ovvero volendo tutto esprimere

$$(9)^3 = \begin{array}{ll} 5\times5\times5 \ldots\ldots & 125 \\ 4\times4\times4 \ldots\ldots & 64 \\ \left\{\begin{array}{l}5\times5\times4\\5\times5\times4\\5\times5\times4\end{array}\right\} \ldots\ldots & \begin{array}{l}100\\100\\100\end{array} \\ \left\{\begin{array}{l}4\times4\times5\\4\times4\times5\\4\times4\times5\end{array}\right. \ldots\ldots & \begin{array}{l}80\\80\\80\end{array} \\ \hline 729 = \ldots\ldots\ldots\ldots & 729 \end{array}$$

La dimostrazione di questo lemma essendo complicatissima colla sola Aritmetica, siamo costretti doverla rimandare all' *Algebra.*

3.° Ma fingiamo che il 9 fosse diviso in 3 parti qualunque, il suo cubo in questa nuova supposizione a quali quantità è uguale, corrispondente alle parti nelle quali è diviso questo numero? Se per esempio $9 = 3 + 2 + 4$: si domanda $(9)^3$ come debbe ottenersi da quantità corrispondenti alle parti 3, 2, 4?

$$
(9)^3 = (2+3+4)^3 = \begin{array}{ll}
2\times2\times2 \ldots\ldots & 8 \\
\left\{\begin{array}{ll} 2\times2\times3 \ldots\ldots & 12 \\ 2\times2\times3 \ldots\ldots & 12 \\ 2\times2\times3 \ldots\ldots & 12 \end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{ll} 3\times3\times2 \ldots\ldots & 18 \\ 3\times3\times2 \ldots\ldots & 18 \\ 3\times3\times3 \ldots\ldots & 18 \end{array}\right. & \\
3\times3\times3 \ldots\ldots & 27 \\
\left\{\begin{array}{ll} 3\times3\times4 \ldots\ldots & 36 \\ 3\times3\times4 \ldots\ldots & 36 \\ 3\times3\times4 \ldots\ldots & 36 \end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{ll} 4\times4\times3 \ldots\ldots & 48 \\ 4\times4\times3 \ldots\ldots & 48 \\ 4\times4\times3 \ldots\ldots & 48 \end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{ll} 2\times2\times4 \ldots\ldots & 16 \\ 2\times2\times4 \ldots\ldots & 16 \\ 2\times2\times4 \ldots\ldots & 16 \end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{ll} 4\times4\times2 \ldots\ldots & 32 \\ 4\times4\times2 \ldots\ldots & 32 \\ 4\times4\times2 \ldots\ldots & 32 \end{array}\right. & \\
4\times4\times4 \ldots\ldots & 64 \\
\left\{\begin{array}{ll} 2\times3\times4 \ldots\ldots & 24 \\ 2\times3\times4 \ldots\ldots & 24 \\ 2\times3\times4 \ldots\ldots & 24 \end{array}\right. & \\
\left\{\begin{array}{ll} 2\times3\times4 \ldots\ldots & 24 \\ 2\times3\times4 \ldots\ldots & 24 \\ 2\times3\times4 \ldots\ldots & 24 \end{array}\right. & \\
\hline
729 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 729
\end{array}
$$

Sicchè il cubo corrispondente a un numero diviso in tre parti qualunque è uguale alla somma de' cubi delle parti, del triplo quadrato di ognuno, in tutte le altre; col sestuplo del prodotto di tutte e tre le parti.

Corollario. Con questa teorica è facile formarvi l' idea di un cubo corrispondente a un numero diviso in quattro, cinque parti ec. ec.

4.° Se poi si volesse un cubo, il cui lato fosse per esempio 235, dovrebbesi tal numero immaginare spartito nelle parti 200 + 30 + 5. Quindi bisognerebbe riunire in una somma

1.° Il cubo di 200.....	=	8000000
2.° Il triplo quadrato di 200 per 30....	=	3600000
3.° Il triplo quadrato di 30 per 200....	=	540000
4.° Il cubo di 30.....	=	27000
5.° Il triplo quadrato di 230 per 5....	=	793500
6.° Il triplo quadrato di 5 per 230....	=	17250
7.° Il cubo di 5.....	=	125
Somma.....		12977875

5.° Ma se riflettete, i prodotti parziali si possono scrivere senza zeri sulla destra: perchè il valore è determinato dalle cifre de' prodotti inferiori, in corrispondenza de' quali ne' fattori superiori sono sottintesi gli zeri: sicchè possono brevemente essere notati del seguente modo

```
 8
 36
  54
   27
  7935
   1725
     125
12977875
```

Sicchè per elevare a cubo un numero composto di qualunque numero di cifre, è bene che caccisi la seguente regola, perchè sieno sommati

1.° Il cubo del primo numero a sinistra.
2.° Il triplo quadrato del primo pel secondo.
3.° Il triplo quadrato del secondo pel primo.
4.° Il cubo del secondo.
5.° Il triplo quadrato de' due primi pel terzo.
6.° Il triplo quadrato del terzo pe' due primi.
7.° Il cubo del terzo.
8.° Il triplo quadrato de' tre primi pel quarto.
9.° Il triplo quadrato del quarto pe' tre primi.
10.° Il cubo del quarto.
ec. ec. ec. ec.

Avvertendo però 1.° che ogni prodotto seguente ecceda l'antecedente di un carattere a destra: secondo che davamo ragione nella formazione del quadrato. 2.° E che le cifre d'ogni cubo non eccedono mai il triplo delle cifre della radice.

6.° Quindi è facile capire che il cubo di un rotto, è un altro rotto avente per numeratore il cubo del numeratore dato, e per denominatore il cubo del denominatore dato. Cioè

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}.$$

7.° E perciò il cubo di un intero unito a rotto si otterrà del modo istesso, riducendo l'intero e rotto a rotto solo, e poi eseguendo le opportune riduzioni. Così per esempio

$$\left(7\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{23}{3}\right)^3 = \frac{12167}{27} = 450\,\frac{17}{27}.$$

8.° E in conseguenza che un decimale si eleva a cubo; se considerato come intero, viene poi dal prodotto finale spartito tal numero di cifre decimali, quanto è il triplo delle figure decimali che trovansi nel decimale dato. Così per esempio

$$(2,35)^3 = 12.977875.$$

9.° E qui è pure notevole la differenza che passa tra le radici, i quadrati, i cubi corrispondenti. Poichè se sono dati

	3, 4
saranno i quadrati	9, 16
saranno i cubi	27, 64.

Cioè mentre le radici differivano di 1, i loro quadrati differiscono di 7, e i loro cubi differiscono di 37. Altra è dunque la ragione delle linee, altra delle superficie, ovvero quadrati; altra è poi quella de' solidi, ovvero cubi.

10.° Finalmente non dimenticate che il cubo del rotto $\frac{3}{4}$ si può trovare così nel modo prescritto nel n.° 6 di questa Lezione; come anche trasformando il rotto dato in rotto decimale. Per esempio $\frac{3}{4} = 0.75$. Sicchè

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} = (0.75)^3 = 0,421875.$$

LEZIONE XVIII.

Estrazione della Radice Quadrata.

1.° *Estrarre la radice Quadrata.* Ogni numero si può elevare a quadrato: non da ogni numero però si può esattamente estrarre la radice quadrata. Tante volte è d'uopo che ci contentiamo di una radice prossima alla vera, e quasi indiscernibile da quella: non mai però perfettamente identica a essa. Qualunque però avesse da essere la radice, o esatta, o approssimativa, è necessario, per non errare in tale operazione, che si ponga mente alle cose che seguono. E di quello che vado prescrivendovi sentirete la ragione, se vi ricorderete della formazione del quadrato. 2.° Il numero dato si divida in classi, ognuna contenente due cifre procedendo da destra a sinistra. Niente importa se l'ultima classe a sinistra contenga una cifra sola. Il numero delle classi dinoterà il numero de' caratteri della radice che si cerca. 3.° Si estragga dall'ultima classe sulla sinistra la radice prossimamente inferiore, e questa sarà la prima cifra della radice cercata. 4.° Si elevi a quadrato il carattere già trovato della radice, e si sottragga dall'ultima classe sulla sinistra; e si noti il residuo se ve ne sia. 5.° Al residuo si aggiunga a destra il primo carattere della classe, che immediatamente segue, e queste cifre chiameremo primo dividendo. 6.° Si raddoppî il primo carattere già trovato della radice, e questo passi a divisore. 7.° Si divida il dividendo pel divisore; e il quoto sarà il secondo carattere della radice, purchè il quadrato che risulta da'due caratteri della radice già trovati si possa sottrarre dalle ultime due classi sulla sinistra. Altrimenti il quoto si diminuisca di tanto, per quanto che il quadrato de' due numeri della radice si possa sottrarre dalle due predette classi, e si noti il residuo. 8.° Al secondo residuo si apponga il primo carattere della terza classe; e nascerà un nuovo dividendo. 9.° Si raddoppino i due caratteri della radice, e saranno nuovo divisore. 10.° Si divida il dividendo pel divisore ec. ec. sempre dell'istesso modo come qui sotto fatto si vede e mettendo 0 sempre che il divisore non entra affatto nel dividendo.

Esempio.

	1,88,51,29	$\sqrt{1373}$
	1	
2	8	
	169	
26	195	
	18769	
274	822	
	1885129	

2.° Se poi si vuol estrarre la radice quadrata per esempio da 7: bisogna che il numero 7 sia convertito nel decimale 7,000000: e quindi si operi come sopra. Bisogna però che i decimali sieno pari di numero.

3.° Se poi si volesse estrarre la radice quadrata da un rotto, due casi possono darsi. 1.° o che il rotto sia quadrato perfetto come per esempio $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$. Ma se poi nel 2.° caso il rotto non corrisponde a perfetto quadrato, prima bisogna trasformarlo in rotto decimale, quindi estrarre la radice, come se il numero fosse intero. Sia da estrarsi la radice quadrata dal rotto $\frac{4}{7}$. Trasformandolo in decimale sarà $\frac{4}{7}=0,57142$ ec. Sicchè si tratta estrarre la radice da 0.57142.

	0.57142	$\sqrt{0.239}$
	4	
4	17	
	0 529	
46	424	
	0.57121	
	21	

4.° *Spiegazione di questo esempio.* Al numeratore 4 si aggiungano molti zeri a diritta, e quindi si divida pel denominatore 7. Nascerà il decimale 0.57142. Da questo decimale estraggasi la radice quadrata, come dicevamo nel n.° 2.° di questa Lezione. Essa sarà = 0.239.

5.° Tutto in queste operazioni è di facilissima intelligenza: solamente i giovanetti potrebbero trovare difficoltà nel capire perchè debbonsi cacciare i divisori dal doppio dei quoti radi-

cali. Ma la difficoltà svanisce, se vogliono darsi la pena a rimembrare la formazione del quadrato: ove oltre dei quadrati delle parti entra il doppio di un numero nell'altro: dunque nel determinare la radice di un quadrato, oltre che il quadrato nella prima parte deve determinare la corrispondente radice; il doppio di questa radice dev'essere divisore che sperimentato in un dividendo, deve determinare il secondo carattere. E così del rimanente.

LEZIONE XIX.

Estrazione della radice cubica.

1.° Parimenti che dicevamo della quadrata, possiamo dire della radice cubica. Ogni numero si eleva a cubo, ma non da ogni numero si estrae esattamente la radice cubica. Conviene tante volte contentarsi di una radice approssimativa alla vera; e tanto più prossima, per quanto più decimali si adoperano. O esatta, od approssimativa la radice che fosse: ecco a quali punti bisogna abbadare nella soluzione del problema risguardante la radice cubica. E di quanto vado mano mano dicendovi sentirete ragione pienissima, se chiamerete in mente ciò che io vi diceva in quanto alla formazione del cubo.

2.° — 1.° Il numero, dal quale si vuol estrarre la radice cubica si divida in classi; ognuna di tre cifre, procedendo da destra a sinistra: non ponendo mente se l'ultima a sinistra non risultasse di tre. Il numero delle classi darebbe il numero delle cifre che entrerebbero nella radice. 2.° Dall'ultima classe a sinistra si estragga la radice cubica prossimamente inferiore, e siffatta radice si metta presso al segno radicale, questa cifra sarà la prima della radice che cercasi. 3.° Si trovi il cubo del primo carattere della radice, e scritto sotto l'ultima classe a sinistra si sottragga da quella, e si noti il residuo. 4.° A siffatto residuo si apponga il primo carattere della classe che immediatamente segue: il numero composto dal residuo e dalla cifra messa a destra, sarà il dividendo 5.° Si trovi il triplo quadrato della radice avuta, e si metta per divisore. 6.° Si divida il dividendo pel divisore, e il quoto sarà il secondo carattere della radice; purchè però il cubo che nasce dalle due cifre avute si possa sottrarre dalle due classi a sinistra; altrimenti si vada il secondo carattere della radice scemando di tante unità, fino a che il cubo che nasce rendasi sottraibile. 7.° Si trovi il cubo de' due caratteri della radice, e sottratto dalle due classi, si noti il residuo. 8.° Al secondo residuo si apponga la prima cifra della terza classe, e si avrà il secondo dividen-

do. 9.° Il triplo quadrato delle cifre notate presso il segno radicale sarà il divisore ec. ec. ec.

Esempio.

	12977875	$\sqrt[3]{235}$
	8	
12	49	
	12167	
1587	8108	
	12977875	

3.° Se poi si volesse la radice cubica di 7, bisogna in tal caso che il 7 sia convertito in decimale; aggiungendo tre, sei, nove ec. zeri. Si vorrebbe dunque la radice terza di 7

	7,000,000	$\sqrt[3]{1.91}$
	1	
3	60	
	6859	
1083	1410	
	6967871	
	32129	

4.° Se poi si volesse estrarre la radice cubica da un rotto: due casi possono occorrere 1.° o che il rotto sia cubo perfetto, 2.° o che non sia tale. Nel 1.° caso: il rotto avente per numeratore la radice del numeratore dato, e per denominatore la radice del denominatore dato, sarà la radice cercata. Per esempio $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$. Nel 2.° caso: il rotto comune si trasformi in rotto decimale, e poi si operi come nel paragrafo 4.° di questa Lezione.

5.° Se poi si volesse la radice cubica di un'intero unito a rotto: bisogna prima l'intero e rotto convertirlo a rotto solo: secondariamente ridurre il rotto comune a rotto decimale, e operare come nel paragrafo 4.° della presente Lezione.

LEZIONE XX.

Delle ragioni, e proporzioni.

1.° *Introduzione.* Non pochi giovanetti, i quali sarebbero così ornamento della patria, e delle scienze, come a loro genitori consolazione e letizia, si arrestano tante volte dallo studio delle scienze Matematiche: perchè giunti all' ontologia di esse, alle ragioni e proporzioni, non sono un tantino aiutati, non sono per così dire presi per mano, onde reggerli in una strada, che sebbene pianissima, pare però loro selvaggia, aspra e forte. Quindi avviene che scuorati abbandonano al meglio le Matematiche. Ho veduto io giovanetti che disperati di tali scienze, e confortati poi dalla mia pazienza, che a dir vero in questa opera d'insegnare fu sempre pazienza di anacoreta, riuscirono così eccellenti in queste materie, che quanto essi sono tuttavia memori dell' impegno, che mi dava per loro; altrettanto sono memore io del profitto che essi riportavano dopo un mio misto di pazienza, e di fuoco. Forse è vero che si dânno delle teste assolutamente anti-geometriche, le quali neanche intendono la quarta di Euclide, come di sè medesimo confessa il fondatore della tragedia italiana, Alfieri (1). Ma è pure verissimo; che di molti, i quali ritraggono il piede da questi studî, principal cagione è l'impazienza di spiegar tutto accuratamente. E guai a quei giovinetti, i quali entrati a scrupolo di parole, di esempî, di difficoltà, non hanno accortezza di proporre tutto, per avere tutto spiegato dal loro precettore. E siccome le più gravi difficoltà in Matematica dipendono dal non approfondire bene le *ragioni*, e *proporzioni*: perciò con quell' istesso impegno, col quale le ho sempre insegnate, colla medesima sollecitudine mi adopero esporle nel presente trattato.

2.° *Necessità di trattare con numeri tali dottrine.* In Euclide il trattato delle Ragioni, e Proporzioni è sviluppato, ed esemplificato con linee: quelle linee però dinotano ogni specie di grandezze; ch'è quanto dire, anche le superficie, e i solidi. I giovinetti però incontrano gravissime difficoltà. Nè con ciò intendo di accagionare la fama di quel sommo Geometra, il cui libro *tulit aera Sosiis, maria transiit, et longum Auctori prorogavit aevum.* Molti de' Matematici francesi però, volendo togliere le difficoltà, che in quanto a tale teorica in mente dei giovinetti preparavano quelle benedette linee: hanno sostituito i numeri.

---

(1) Vita Cap. IV pag. 42.

Ma questo sistema quanto è più facile di quello, per altrettanto poi per mancanza di conveniente associazione potrebbe non prestarsi chiaramente, sempre che queste dottrine soglionsi applicare nel resto di questa scienza.

3.° *Nostro avviso.* A me è paruto conveniente tutte queste dottrine ontologiche, e generali trattarle con numeri; fare le dimostrazioni con numeri: ma quei numeri essere linee, superficie, solidi, e in conseguenza esemplificarli sopra tutte queste grandezze. Quindi è, che alla dimostrazione numerica tante volte va congiunta l'esemplificazione in linee, od in altre quantità nel mio studio privato.

4.° *Ragione, termini, esponente: diverse specie di ragione.* Chi dice ragione Matematica, dice confronto, paragone: e non vi può essere paragone, e confronto, ove non sieno solamente due quantità. Se per esempio ho 8 e 4; paragonandoli tra loro, io conosco, e determino la ragione di uno sopra l'altro. Non vi è ragione dunque, ove è una sola quantità: alla ragione sono necessarie due grandezze. Ella si esprime per esempio 8 : 4, e si pronunzia la ragione di 8 a 4. Or le grandezze diconsi termini della ragione: e specialmente *antecedente*, quella che si paragona; e *conseguente*, quella alla quale si paragona.

Così nell'addotto esempio 8 è antecedente, 4 conseguente.

In antico *ragione* era identico di Proporzione: ma tutt' i Matematici distinguono una dall'altra: perchè a costituire una ragione richieggonsi due grandezze; mentre che a formare una proporzione debbono concorrere due ragioni.

Nella ragione oltre i termini che sono dati, cioè antecedente e conseguente, sottintendesi una terza quantità, la quale risulta dopo paragonato l'antecedente col conseguente.

Or questa quantità non espressa, ma sottintesa, ma determinata dal paragone, dicesi *Esponente*, *quantità*, denominatore della ragione. Così nell'addotto esempio 8 e 4 sono i termini: ma perchè 8 contiene 4, 2 volte: il 2 dicesi esponente o denominatore della ragione.

E perchè un antecedente può essere paragonato con diversi conseguenti: perciò gli antichi chiamavano ragione dupla, suddupla: secondo che l'antecedente contiene 2 volte il conseguente, ovvero $\frac{1}{2}$; ec. ec.

E perchè l'antecedente paragonatosi col conseguente, o il conteneva, o l'eccedeva: la ragione, nella quale il conseguente si contiene nell'antecedente dicesi geometrica; la ragione poi nella quale si vede l'eccesso dell'antecedente sul conseguente dicesi Aritmetica.

Così 8 : 4 coll'esponente 2 dicesi geometrica, o di continen-

za. Ma 8.4 coll' esponente 4 dicesi aritmetica, o di differenza. Noi prima parleremo delle ragioni geometriche, e quindi passeremo alle aritmetiche.

5.° *Grandezze commensurabili e incommensurabili.* Le grandezze, come dicevamo sul principio di queste lezioni, possono essere divise in omogenee, e in eterogenee. Queste però che costituiscono una ragione è assolutamente richiesto, che siano omogenee. Ma oltre di ciò, è ancor necessario di più. Perchè non potrà mai determinarsi la ragione tra due grandezze, se entrambe non sono misurate da una terza grandezza, or si potrebbe dare anche il caso essere le grandezze costituenti la ragione di tal condizione, che non vengano affatto misurate esattamente da una terza grandezza; come per esempio sarebbero il lato, e la diagonale del quadrato. Or le prime sono dette grandezze *commensurabili*, *incommensurabili* le seconde. In conseguenza la ragione delle grandezze commensurabili è determinabilissima; indeterminabile poi quella delle grandezze incommensurabili.

Giova però avvertire, che sebbene non può essere conosciuto e determinato il vero rapporto delle grandezze incommensurabili: esso però viene determinato a un di presso, e per approssimazione per mezzo dei decimali. Così il Matematico tentando l' impossibile cacciasi sui rapporti di tutte le grandezze; perchè tutte le considera come commensurabili. Sopra questo principio egli disse che il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio era come 7 a 22 a un di presso. ec. ec.

6.° *Parte, tutto: parte aliquota ed aliquanta: tutto aliquoto ed aliquanto.* Non è questo il luogo opportuno per mostrarvi la genesi delle idee generali di *tutto*, e di *parte:* spetta agli ideologi tracciare la genesi di siffatte idee. Non potete però negarmi, che quando vi si presenta una grandezza qualunque, essa tal quale e, dicesi *tutto:* se poi la smembrate, e la paragonate con quei tali suoi smembramenti, ognuno di questi dicesi *parte* di quel tutto. Che se anche una di queste parti la suddividete, ella dicesi tutto relativamente alle suddivisioni: E così andate voi discorrendo. Ecco come in noi derivino le idee di tutto, e di parte: le quali essendo idee generali variano infinitamente negl' individui. Così per esempio voi direte 100, tutto di 70, e 30; 70 poi direte tutto di 45, e 25. Nè altrimenti avviene negli oggetti fisici, e naturali. Or se la parte misura esattamente il tutto dicesi *aliquota*, e questo *aliquoto;* tali sarebbero 3, e 6. Se poi la parte non misura esattamente il tutto; quella dicesi *aliquanta*, e questo *aliquanto;* tali sarebbero il diametro, e la circonferenza del cerchio; e mille altri esempli numerici, come a dire 3 e 7 ec. ec. Anche dell' istesso modo vi formate l' idea del multiplice *aliquoto*, ed *aliquanto*. Per

esempio 12 è multiplice aliquoto di 3: e 14 è multiplice aliquanto dell' istesso 3.

Voglio che non omettiate inconsiderate queste definizioni: le quali, se non sono alla scienza assolutamente richieste, le troverete però adoperate nelle scienze, per non dirvi da tutti i Matematici.

7.° *Aliquote simili, equimultiplici.* Se vi sieno due grandezze disuguali, e altre due minori delle prime; ma tali che rispettivamente le misurino l'istesso numero di volte: le grandezze minori diconsi *aliquote simili* delle maggiori, e le maggiori *multiplici simili* delle minori.

Sieno per esempio

8 6
4 3

le grandezze 8, e 6 sono multiplici simili di 4 e 3: ch' è quanto dire quante volte ripetuto il quattro per se stesso dà 8; altrettanto numero di volte il 3 ripetuto per sè stesso dà 6. Le grandezze 4, e 3 diconsi aliquote simili: ch'è quanto dire quante volte il 4 entra nell' 8, altrettante il 3 entra nel numero 6.

L' uguaglianza, o la similitudine delle ragioni non sempre nasce dall' uguaglianza dei termini costituenti le ragioni: ma bensì dall' identità de' quoti, che sono gli esponenti delle ragioni. Per esempio la ragione 26 : 13 è uguale alla ragione di 14 : 7; non perchè fossero eguali i termini, che anzi sono disuguali; ma perchè il quoto di 26 per 13 ch'è 2, è perfettamente l'istesso del quoto di 14 per 7 ch' è 2.

Un giovanetto dunque, che vuole fare profitto nelle proporzioni debbe abituarsi dall' ispezione dei termini costituenti le ragioni passare immediatamente a percepire gli esponenti. Così di slancio conoscerà, che le ragioni di 50 : 25 = 2 : 1. La ragione di 30 : 10 > 4 : 2; e la ragione di 9 : 3 < 16 : 4.

8.° *Ogni numero esprime una ragione, dandogli per conseguente l' unità.* Ma mi sento dire: La ragione di 50 : 25 è identica a quella di 30 : 15; e la identità trovasi negli esponenti delle ragioni 2, 2; come va dunque che dalla identità degli esponenti rilevasi la similitudine delle ragioni? Se all'esponente di una ragione diasi per conseguente l' 1 nasce una nuova ragione: per esempio $\frac{50}{25} = 2$, e $\frac{30}{15} = 2$. Sicchè

$$50 : 25 :: 2 : 1 \text{ ed anche } 30 : 15 :: 2 : 1.$$

In generale ogni grandezza trasformasi in ragione, dandole per conseguente l' unità: non altrimenti che ogni intero trasfor-

masi in rotto, dandogli per denominatore l'unità. Le ragioni dunque che sono uguali, sono ancora identiche, qualora sieno sostituite dalle ragioni de' loro esponenti, dando però a questi per conseguente l'unità.

9.° *Ragione semplice, e composta.* Sempre che il paragone ha luogo tra due quantità: la ragione dicesi *semplice;* tale sarebbe la ragione di 8 : 4. Ma se vi sieno più ragioni semplici; e poi vi sia un'altra, il cui *esponente* risulti dal prodotto di tutti gli esponenti delle medesime ragioni semplici; questa ragione risultante da tal prodotto, e dall'unità per *conseguente*, dicesi *composta* da tutte le ragioni semplici che erano già date. Sieno per esempio le ragioni semplici

$$\text{di}\begin{cases} 6 \overset{2}{:} 3 \\ 4 \overset{4}{:} 1 \\ 6 \overset{3}{:} 2. \end{cases}$$

La ragione di $2 \times 4 \times 3 : 1$, ovvero di $24 : 1$ dicesi composta delle ragioni semplici di $6 : 3$, di $4 : 1$, di $6 : 2$.

La ragione composta può essere anche altrimenti determinata; cioè moltiplicando gli antecedenti tra loro, e i conseguenti anche tra loro: la ragione del primo al secondo prodotto, dicesi anche *composta* dalle ragioni semplici già premesse. Dunque la ragione di $6 \times 4 \times 6 : 3 \times 1 \times 2$, dicesi composta dalle ragioni di $6 : 3$, di $4 : 1$, di $6 : 2$. Ed eseguendo la multiplicazione sarà la ragione di $144 : 6$ uguale a quella di $24 : 1$, e perciò composta dalle tre ragioni date.

Non dimenticate il duplice modo di rilevare una ragione composta.

10.° Tante volte però avviene che le ragioni componenti sieno tutte uguali: in tal caso, la composta di due ragioni uguali dicesi duplicata; di tre, triplicata ecc.

E perchè la duplicata può nascere moltiplicando l'esponente per sè stesso, e aggiungendovi a conseguente l'unità; perciò la duplicata ragione, quadrata; la triplicata, dicesi cuba ec. Sieno per es. Le ragioni semplici e uguali

$$\begin{cases} 6 : 3 \\ 4 : 2. \end{cases}$$

La ragione di $4 : 1$ ovvero di $24 : 6$ dicesi duplicata o di quella di $6 : 3$, o della uguale di $4 : 2$. Sieno inoltre le ragioni semplici

$$\text{di}\begin{cases} 6 : 3 \\ 4 : 2 \\ 10 : 5. \end{cases}$$

La ragione di 8 : 1 , ovvero di 240 : 30 dicesi triplicata, o della ragione di 6 : 3 , o di quella di 4 : 2 , o dell' altra di 10 : 5.

11.° Nel formare però le ragioni composte risultanti da due serie diverse di grandezze , o di ragioni, può stare, che tutte le ragioni di una serie sieno rispettivamente uguali a tutte le ragioni dell' altra : in questa ipotesi le ragioni diconsi *ordinate*. Tali sarebbero

1.ª Serie.	2.ª Serie.
3 : 1	9 : 3
8 : 4	2 : 1
1 : 2	3 : 6.

Ma se mai le ragioni sono uguali , e non corrispondono per ordine la prima alla prima ecc. ma la prima di una serie è uguale all' ultima dell' altra serie , ec. in questo caso le ragioni diconsi *perturbate*. Tali sarebbero

1.ª Serie.	2.ª Serie.
3 : 1	3 : 6
8 : 4	9 : 3
1 : 2	2 : 1.

Talmente che abituati a distinguere gli esponenti , e non abbadando all' accidentalità dell' ordine , facilmente potrete rilevare essere uguali tra loro le composte delle ragioni dell' una , e dell' altra serie.

LEZIONE XXI.

Delle proporzioni.

1.° *Proporzione , e sue specie : Progressione e sue specie.* Dicevamo che la ragione risultava dal paragone di due grandezze : ed al presente diciamo che la proporzione risulta dall' uguaglianza di due ragioni. Tale sarebbe 8 : 4 :: 6 : 3. E si proferisce 8 sta a 4 come 6 sta a 3. Ovvero il quoto di $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$. Già vedete che parlasi di ragioni , e di proporzioni geometriche. Che se poi l' antecedente eccede di tanto il conseguente nella seconda ragione, di quanto l' antecedente della prima eccede il suo conseguente, la proporzione dicesi Aritmetica. Tale sarebbe

$$7.3 : 5.1 \text{ , cioè } 7 - 3 = 5 - 1.$$

Noi prima tratteremo delle proporzioni Geometriche, e dopo delle Aritmetiche.

La proporzione, che costa di quattro grandezze constituenti due ragioni uguali dicesi *discreta*. La proporzione che costa di tre grandezze formanti due ragioni uguali, perchè la media fa di conseguente nella prima, e di antecedente nella seconda ragione, dicesi *continua*. Tale sarebbe ∺ 8 : 4 : 2. E si legge 8 sta a 4 come 4 a 2.

Una serie poi di più grandezze procedente sempre in modo che alcune fanno da conseguente con certe altre, e di antecedenti con talune altre, dicesi *progressione*. Tale sarebbe

∺ 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 decrescente.

E l' altra

∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 ecc. crescente.

2.° *Teorema fondamentale delle proporzioni Geometriche*. Se quattro grandezze sono geometricamente proporzionali, il prodotto de' termini estremi è uguale al prodotto de' termini medii.

Sieno $4 : 2 :: 6 : 3.$

Io dico che $4 \times 3 = 6 \times 2.$

Dimostrazione.

Per ipotesi $4 : 2 :: 6 : 3.$

E convertendo in rotti le ragioni. Sarà

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3}.$$

E riducendo allo stesso denominatore. Sarà

$$\frac{4 \times 3}{2 \times 3} = \frac{6 \times 2}{2 \times 3}.$$

E togliendo i denominatori. Sarà

$$4 \times 3 = 6 \times 2. \text{C.B.D.}$$

Ecco sopra quale verità è fondata tutta l' ontologia delle Matematiche: e per questa ragione dicesi Teorema fondamentale.

*

Anzi questo stesso Teorema ci apre la strada ad una verità inversa alla precedente. Dappoichè se $4 \times 3 = 6 \times 2$ assolutamente 4, e 3 debbono stare negli estremi, e 6, e 2 nei luoghi di mezzo: cioè

$$4 : 6 :: 2 : 3 \text{ ovvero } 4 : 2 :: 6 : 3.$$

Dunque un giovinetto debbe avvezzarsi dalle grandezze proporzionali cacciare prodotti uguali; e da prodotti uguali che avesse, cacciarsi ragioni uguali, ovvero proporzionali grandezze.

3.° Che se poi la proporzione è continua, cioè costa di tre termini: in tal caso il prodotto degli estremi pareggia il quadrato del termine di mezzo. Sia per esempio

$$\div\div 8 : 4 : 2$$

sarà $$\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$$

ovvero $$\frac{8 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4 \times 4}{4 \times 3}$$

ovvero $$8 \times 2 = 4 \times 4.$$

E se $12 \times 3 = 6 \times 6$: in tutti i conti $\div\div 12 : 6 : 3$.

Sicchè non dimenticate dalle proporzioni continue sapere che il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del termine medio: e sempre che avete questa uguaglianza di rapporti, immediatamente volgerli in proporzione, purchè il bisogno lo esiga.

4.° *Comporre, dividere, invertire, convertire, permutare i termini delle ragioni.* Si compongono i termini: quando l'antecedente sommato col conseguente di una data ragione, si paragona coll'istesso conseguente. Si dividono, quando l'antecedente meno il conseguente è paragonato col medesimo conseguente. S'invertono quando il conseguente passa ad antecedente, e l'antecedente a conseguente. Si convertono quando l'antecedente si paragona coll'eccesso dell'antecedente sul conseguente. Si permutano i termini di due ragioni, quando si paragonano gli antecedenti tra loro, ed i conseguenti tra loro. Sia

$$18 : 6 :: 12 : 4.$$

Sarà	Compon.	$18 + 6 : 6 :: 12 + 4 : 4$; $24 : 6 :: 16 : 4$
	Divid.	$18 - 6 : 6 :: 12 - 4 : 4$, $12 : 6 :: 8 : 4$
	Invert.	$6 : 18 :: 4 : 12$
	Convert.	$18 : 18 - 6 :: 12 : 12 - 4$. $18 : 12 :: 12 : 8$
	Permut.	$18 : 12 :: 6 : 4$.

5.° *Trovare il quarto termine geometricamente proporzionale a tre altri termini dati.* Se siasi capito che in ogni proporzione geometrica il prodotto de' termini di mezzo deve sempre pareggiare quello degli estremi: è facilissimo in ordine a tre grandezze date trovare la quarta, in ordine a due trovare la terza, e in ordine a due ancora trovare la media proporzionale. Difatti devesi trovare il quarto proporzionale tra le quantità $8 : 4 :: 5 : X$. Secondo che abbiamo pocanzi detto sarà $8 \times X = 4 \times 6$. Dunque il prodotto di 4 per 6 si può identificare col prodotto del fattore 8 pel fattore X. Ma si è detto, che quando il prodotto dividesi per un fattore il quoto deve essere l' altro fattore. Dunque

$$X = \frac{4 \times 6}{8} = 3. \text{ Onde } 8 : 4 :: 6 : 3.$$

Sicchè trarremo, che per trovare il quarto in ordine a tre termini dati, bisogna, che il prodotto del secondo nel terzo sia diviso pel primo: il quoto sarà il quarto proporzionale. Lo stesso avverrebbe se si trattasse di trovare il primo $X : 6 :: 4 : 8$. In generale il termine estremo di una proporzione determinasi, se il prodotto de' medî dividasi per l'altro estremo.

6.° *Trovare il terzo termine geometricamente proporzionale a due altri dati.* Partendo sempre dal teorema fondamentale, si avrà nel dato del presente problema per es. $\div\div 8 : 4 : X$; ovvero $8 : 4 :: 4 : X$. Dunque $4 \times 4 = 8 \times X$.

Sicchè il quadrato di 4 è identico al prodotto del primo nel terzo, che è ignoto. Dunque rendesi determinato, e noto; se il quadrato di 4 dividasi per 8: il quoto 2 sarà terzo proporzionale. Cioè $8 : 4 :: 4 : 2$ ovvero $\div\div 8 : 4 : 2$.

Sicchè terremo la seguente regola generale, che il terzo proporzionale determinasi dal quoto, che hassi dividendo il quadrato del secondo termine pel primo.

7.° *Trovare il medio geometricamente proporzionale in ordine a due termini dati.* Per esempio fra i termini 8, e 2 trovare il medio proporzionale. Situando le grandezze secondo la precedente formola.

Sarà $8 : X :: X : 2$.

Dunque $X^2 = 16$.

Dunque $\sqrt[2]{X^2} = \sqrt[2]{16}$.

Dunque $X = 4$.

Sicchè $8 : 4 :: 4 : 2$ ovvero $:: 8 : 4 : 2$.

Dimostrazione.

Difatti il prodotto di 8 per 2; identificasi col quadrato di X: dunque la radice di quel prodotto deve pareggiare la semplice X.

Sicchè caveremo la seguente regola generale che, per trovare il medio geometricamente proporzionale tra due termini dati, bisogna che dal prodotto di essi estraggasi la radice quadrata: una tal radice è il termine medio geometricamente proporzionale.

Avvertimento. Permettete, dilettissimi giovanetti, che quì vi tenga avvertiti di certa essenziale precauzione in Matematica. Voi adesso sapete un canone generale per trovare il medio fra due termini geometricamente proporzionale. Or sarebbe grande errore il credere, che avendo trovato uno, colla medesima facilità riusciate a trovare due, tre, e quanti medî proporzionali vi piacesse fra due termiui dati. Le medie proporzionali non sono ablativi assoluti. Or questa presunzione per quanto rendesi perdonabile al vostro attuale discernimento, per altrettanto poi sarebbe turpitudine per uomo che presumesse avere meute matematica. Io vi prevengo che nelle quistioni matematiche non siate faciloni, come i greci parevano a quel sacerdote; il quale diceva che i Numi allora avrebbero arrestato la peste, quando sarebbesi duplicato l'altare, che era cubo perfetto. Quando sarete più grandetti non vi mancherà tempo di vedere l'impossibilità delle due medie proporzionali per le vie dell'aritmetica e della Geometria Elementare.

Solo voglio che poniate mente alla seguente riflessione. Per trovare *una* media proporzionale, avete avuto bisogno di elevare a quadrato l'ignota; cioè la potenza dell'ignota è una unità sopra la media proporzionale, se vi provaste trovare *due* medie proporzionali, l'espouente dell'ignota sarebbe 3. Or tutt'i problemi, ove l'ignota ha per esponente una quantità sopra il 2 diconsi solidi, sublimi, spettanti ad altri matematici tanto superiori a voi, quanto sulle seconde sono superiori le terze, le quarte ec. potenze. Avvertite la differeuza fra le due medie proporzionali lineari, e quelle numeriche che trovansi fra due termini di una progressione geometrica $:: 16 : X : Y : 2$. Sarebbe $X = 8$, $Y = 4$ secondo la formola Algebrica. Ma è ben diverso il problema delle due medie proporzionali.

LEZIONE XXII.

1.° Passiamo a trattare della proporzione aritmetica: perchè di essa dovremo valerci in altre lezioni, per non dire che ognuno debba servirsene anche per capire le cose di facilissima esecuzione, e fossero le meccaniche operazioni dell'aritmometro.

Teorema fondamentale.

In ogni proporzione aritmetica la somma degli estremi è uguale alla somma de' termini medî

$$A.B : C.D \text{ sarà } A + D = B + C.$$

Dimostrazione.

Perchè l'uguaglianza delle ragioni aritmetiche è determinata dall'eguaglianza delle differenze degli antecedenti sui rispettivi conseguenti

perciò	$A - B = C - D$
agg.	$+ B \qquad + B$
sarà	$A = \qquad C + B - D$
agg.	$+ D \qquad\qquad + D$
sarà	$A + D = C + D$

come ci eravamo proposti. Per esempio

$$8.3 : 7.2 \text{ sarà } 8 + 2 = 7 + 3.$$

Siccome dalla proporzione deducesi che la somma delle quantità estreme pareggia la somma delle quantità medie: così pure dall'eguaglianza della somma di due a quella di due altre grandezze, può dedursi che le grandezze sono aritmeticamente proporzionali. Se per esempio

$$7 + 8 = 12 + 3. \text{ Sarà } 7.12 : 3.8.$$

E comunque le combinerete, resteranno sempre proporzionali; purchè nel mezzo due di esse, e negli estremi sieno situate le altre due grandezze: ed anche quando sostituiscansi l'une al luogo delle altre.

2.° Se la proporzione è continua, perchè in tal caso la quantità di mezzo intendesi raddoppiata, nascerà allora che la somma del primo e terzo è uguale al doppio del termine medio.

Sia per esempio

$$\div A.B.C \text{ sarà } A + C = 2B$$

$$\div 7.4.1 \text{ sarà } 7 + 1 = 4 + 4 = 2 \times 4.$$

3.° *Trovare il quarto aritmeticamente proporzionale.* Dalla somma del secondo e terzo sottraete il primo: il residuo sarà quarto proporzionale in ordine a' tre termini dati. Sieno

$$A.B : C.X \text{ sarà } A + X = B + C.$$

Dunque la somma di B + C è uguale all'altra somma, ove A e X sono le parti. Ma se dal tutto togliesi una parte, il residuo dev'essere l'altra parte. Sicchè se da B + C togliete A, nel residuo risulterà il valore di X; come erasi detto da principio.

$$8.3 : 7.X \text{ sarà } 8 + X = 3 + 7 \text{ ovvero } 8 + X = 10.$$

Sicchè $X = 10 - 8$; onde $X = 2$

che è quanto dire $8.3 :: 7.2.$

4.° *Trovare il terzo proporzionale aritmeticamente.* Dal doppio del secondo numero sottraendo il primo, il residuo darà il terzo aritmeticamente proporzionale.

Se $\div A.B.X$ sarà $A + X = 2B$ onde $X = 2B - A$

$\div 7.5.X$ sarà $7 + X = 10$ onde $X = 10 - 7 = 3.$

Sicchè $\div 7.5.3.$

5.° *Trovare il medio aritmeticamente proporzionale.* La metà de' termini dati sarà medio aritmeticamente proporzionale fra loro. Sia per esempio

$$\div A\ X.B \text{ sarà } 2X = A + B. \text{ Sicchè } X = \frac{A + B}{2}$$

$\div 7.X.3$ sarà $2X = 10$. Onde un solo $X = 5.$

LEZIONE XXIII.

Continuazione.

Avvertimento. Intraprendiamo a trattare quella teorica, che i giovinetti di molto inferiori a voi credono *difficilissima:* e che io nella tenuità delle mie forze ho renduto sempre facile e piana. Alfieri, il quale diceva aver avuta mente anti-geometrica, dice poi (1) « nessuno studio mi avrebbe rapito e riempiuto più l'animo che questo (l'astronomia), se io avessi avuto i debiti principî per proseguirlo, tutto sta a' principî ». Ove si sieno bene approfonditi i principî, tutte le scienze che sgomentavano la nostra inerzia addivengono continuata serie di non sperati piaceri.

Debbo però anche avvertirvi di non sgomentarvi degli enunciati de' teoremi che seguiranno. Maudateli a memoria, applicateli a particolari esempî: e vedrete che le pene saranno ricompensate dal piacere, e dal sentimento della verità. In fine io comprenderò sotto una lezione tutta questa teorica, ma la spartirò in paragrafi; sicchè così appariate come più vi si rende comodo e facile.

Teorema 1.°

Se due grandezze misurano l'istesso numero di volte i conseguenti di due ragioni, e misurano anche l'istesso numero di volte gli antecedenti: sarà una ragione uguale all'altra. Sieno

$$X, Y \text{ le due grandezze}$$

$$\text{gli antecedenti} \begin{cases} A, C \\ B, D \end{cases} \text{i conseguenti.}$$

Se X misura C tante volte quante Y misura D; e X misuri altro numero di volte A pari a quello che Y misura B; A : C :: B : D. Sieno

$$X = 3 \text{ aliqu.}$$

$$\text{antec.} \begin{cases} A = 12 & C = 6 \\ B = 8 & D = 4 \end{cases} \text{conseg.}$$

$$Y = 2 \text{ aliqu.}$$

Sarà $12 : 6 :: 8 : 4$ ovvero $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$.

(1) Vita = Epoca 3.ª cap. VII pag. 103.

Dimostrazione.

Imperciocchè 3, e 2 misurando i conseguenti 6, e 4 l'istesso numero di volte, avremo i quoti 2, e 2. E 3, e 2 misurando gli antecedenti 12, e 8 l'istesso numero di volte avremo i quoti 4, e 4. Sicchè le ragioni di 12 : 6, e di 8 : 4 possono essere sostituite dalle ragioni 4 : 2, e di 4 : 2 cioè da una perfetta identità; che è quanto dire 12 : 6 :: 8 : 4, e come se si dicesse 4 : 2 :: 4 : 2. Applicate tale dottrine alle linee, e ad ogni grandezza, che troverete lo stesso.

Questo nuovo teorema non si dimostra col teorema fondamentale; cioè, che in ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi pareggia quello de' medî; perchè non si ha l'uguaglianza delle ragioni, ma questa uguaglianza è appunto quella che si cerca dimostrare: volendola ridurre a quella, sarebbe pratica non razionale, e propriamente non matematica la dimostrazione.

Teorema 2.°

Se due grandezze misurano l'istesso numero di volte i conseguenti; ma la prima di esse misura l'antecedente più volte di quella che la seconda misura l'altro antecedente, sarà la prima ragione maggiore della seconda.

X, Y le due grandezze

Sieno gli antecedenti $\begin{cases} A, C \\ B, D \end{cases}$ i conseguenti

X ed Y misurino l'istesso numero di volte i conseguenti C e D, ma X misuri più volte A, che Y misuri B; dico A : C > B : D; Sieno

$$X = 3 \qquad Y = 2$$
$$A = 27 \qquad C = 9$$
$$B = 12 \qquad D = 6.$$

Sarà $27 : 9 > 12 : 6.$

Dimostrazione.

Le grandezze X, Y misurano l'istesso numero di volte i conseguenti C, D; ovvero 9 e 6; cioè 3 misura 9, 3 volte, non altrimenti che 2 misura 6 anche 3 volte. Ma la grandezza X

misura A più volte che Y misura B; perchè 3 in 27 entra 9; e 2 in 12 entra 6 volte. Dunque saranno gli antecedenti $\frac{9}{6}$ i conseguenti $\frac{3}{3}$ e sarà $\frac{9}{3} > \frac{6}{3}$ che è quanto dire

$$9 : 3 > 6 : 3 \text{ ovvero } 27 : 9 > 12 : 6.$$

Teorema 3.°

Se una ragione è uguale ad un' altra, le parti che esattamente misurano i conseguenti debbono anche esattamente ed egual numero di volte misurare gli antecedenti.

Se $A : B = C : D$; nel caso che X,Y misurano ugual numero di volte B e D; debbono anche egual numero di volte misurare A, e C.

Sia $28 : 4 = 21 : 3$; nell' ipotesi che 4 e 3 misurano esattamente ed egual numero di volte 4 e 3; debbono egual numero di volte ancora misurare gli antecedenti 28, e 21.

Dimostrazione.

Che i conseguenti abbiano numeri, che li misurino esattamente, nasce dal principio che due grandezze sono sempre commensurabili. Tutta la quistione è sugli antecedenti. Poichè se non li misurano esattamente, ed egual numero di volte; una parte dovrebbe misurare il suo antecedente più o meno volte che l'altra parte misura l' altro antecedente.

E in conseguenza sarebbero le ragioni disuguali, la qual cosa è contro l' uguaglianza delle ragioni, che è nell' ipotesi.

Teorema 4.°

Se una ragione è maggior di una altra, quelle parti che misurano i conseguenti l' istesso numero di volte, debbono essere tali che una misuri il suo antecedente più volte che l' altra il suo.

Sia $A : B > C : D$. Se X, Y misurano l' istesso numero di volte i conseguenti B e D; X dovrà misurare A più volte che Y misura C.

Sia per esempio $27 : 9 > 12 : 6$; le parti 3 e 2 che misurano l' istesso numero di volte 9 e 6 debbono essere tali che 3 misuri 27 più volte che 2 misuri 12.

Dimostrazione.

Su i conseguenti non cade dubbio pel noto principio delle quantità commensurabili. Tutta la controversia è in quanto agli antecedenti.

Or se una parte non misura il suo antecedente più volte che l'altra misura il suo, dovrebbe misurarlo o egual numero, o un numero minore: e perciò sarebbe la prima o uguale, o minore della seconda ragione. Ma entrambe queste conseguenze ripugnano alla ipotesi, che la prima è maggiore della seconda ragione. Dunque è ecc.

Teorema 5.°

Se gli antecedenti di due ragioni disuguali sono moltiplici de' loro conseguenti: una ragione si pareggia all' altra, o diminuendo l'antecedente della ragione maggiore, del suo conseguente preso tante volte quanta è la differenza degli esponenti delle ragioni; od accrescendo l' antecedente della ragione minore di tanto, quanto è il suo conseguente anche preso tante volte, quanta è la differenza istessa degli esponenti.

Sia la ragione $24 : 3 > 12 : 4$.

Sarà la differenza degli esponenti

$$8 \text{ e } 3 = 5.$$

Sarebbe dunque

$$24 - 5 \times 3 : 3 = 12 : 4; \text{ ovvero } 24 : 3 = 12 + 4 \times 5 : 4.$$

Che è quanto dire

$$9 : 3 :: 12 : 4; \text{ o pure } 24 : 3 :: 32 : 4.$$

Dimostrazione.

Nel primo caso dall' antecedente togliesi tanta quantità, che il residuo contiene il suo conseguente, quante volte il secondo antecedente contiene il suo: che è quanto dire, le ragioni divengono eguali.

Nel secondo caso, all' antecedente della ragione minore aggiungesi tanta quantità, che esso contiene il suo conseguente l' istesso numero di volte, che il primo antecedente contiene anche il suo; che è quanto dire che le ragioni anche divengono uguali. Dunque ecc.

Due cose dunque bisognerebbe che attentamente noti un giovinetto 1.° i diversi modi, co' quali possonsi pareggiare due ragioni disuguali; secondo che si debbe diminuire l' antecedente della ragione maggiore, od accrescere l' antecedente della ragione minore 2.° che se si volesse operare su i conseguenti, oltre che bisognerebbe invertire le ragioni; in tale inversione

la ragion maggiore addiverrebbe minore; e la minore addiverrebbe maggiore. Se per esempio

$$24 : 3 > 12 : 4.$$

Sarebbe $$4 : 12 > 3 : 24 \quad \frac{1}{3} > \frac{1}{8}.$$

Ciò premesso, è facile la conseguenza.

Teorema 6.°

Le grandezze uguali hanno l'istessa ragione alla terza, e la terza ha uguali ragioni alle grandezze uguali.

Sieno $\begin{matrix} A \\ A \end{matrix}$ le due grandezze, la terza omogenea B.

Come se dicesse

$$A : B :: A : B \text{ ; e } B : A :: B . A.$$

Sieno $$\begin{matrix} A = 12 & B = 4 \\ A = 12 & B = 4. \end{matrix}$$

Sarebbe $$12 : 4 :: 12 : 4 \text{ ; e } 4 : 12 :: 4 : 12.$$

Dimostrazione.

Questo teorema è tanto chiaro, che confonderebbesi con un assioma, cioè con certa cognizione intuitiva; perchè ci è tanta intuizione, quanta può esservi nell'identità A : B :: A : B ovvero 12 : 4 :: 12 : 4 e viceversa.

Teorema 7.°

La ragione di una grandezza maggiore ad una terza grandezza è maggiore della ragione di una minore alla stessa terza; ma la ragione della terza alla minore è maggiore della ragione dell'istessa terza alla maggiore. Sieno $\begin{matrix} A \\ a \end{matrix}$ le grandezze e A > a; e sia B la terza omogenea. Sarà

$$A : B > a : B. \text{ Ma } B : a > B : A.$$

E sieno $$\begin{matrix} A = 12 \\ a = 9 \end{matrix}, \quad B = 3.$$

Troveremo $$12 : 3 > 9 : 3. \text{ Ma } 3 : 9 > 3 : 12.$$

Dimostrazione

Della prima parte.

Il conseguente 3 è comune alle due ragioni; e perciò sottindendosi due volte, è in conseguenza misura esatta di sè stesso.

Ma essendo $12 > 9$, il 3 entrerà più volte in 12 che in 9. Ma ove è tale l'antecedente che è misurato dall'aliquota più volte, là trovasi ragion maggiore. Dunque

$$12 : 3 > 9 : 3. \text{ Di fatti } \frac{12}{3} > \frac{9}{3} 4 > 3.$$

Dimostrazione

Della seconda parte.

Nella seconda parte il 3 fa le veci da antecedente tanto nell'una, quanto nell'altra ragione; e 9, e 12 sono i conseguenti

$$3 \overset{3}{:} 9$$
$$3 \overset{4}{:} 12.$$

Sicchè 3, e 4 che sono le aliquote simili de'conseguenti 9, e 12, sono tali che l'esponente 3 entra nell'antecedente 3 più volte che 4 nell'altro 3. Ma ove l'antecedente contiene maggior numero di volte l'aliquota, è la ragione maggiore. Dunque $3 : 9 > 3 : 12$. Dunque ecc. Difatti $\frac{3}{9} > \frac{3}{12}$ ovvero $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

Teorema 8.°

Se due grandezze hanno uguali ragioni ad una terza, od una terza ha ragioni uguali alle due grandezze: in tutti e due i casi le due grandezze sono uguali fra loro.

Sieno A e C le due grandezze e B la terza omogenea.

E sieno $B : A = B : C.$
$A : B = C : B.$

In tutti e due i casi $A = C.$

Come se si dicesse $12 : 6 = 12 : 6$
$6 : 12 = 6 : 12.$

Dunque $12 = 12.$

L'esempio aritmetico ha dell' intuizione ; perciò volgiamo la mente ad un'esempio applicabile alle quantità continue, per abituare le menti a vedere il vero e ad associarlo sotto la forma di quelle quantità: anche perchè è nelle matematiche frequentissimo l'uso di questo Teorema.

Dimostrazione

Del primo e del secondo caso.

Se A non è $=$ C; una dovrebbe essere maggiore dell'altra, e perciò sarebbero le ragioni disuguali ; conseguenza totalmente opposta all' ipotesi che è stata l' uguaglianza delle due ragioni.

Teorema 9.°

Se una grandezza ha ad una terza maggior ragione che una seconda all' istessa terza, o la terza alla seconda ha maggior ragione che la stessa terza alla prima : in tutti e due i casi la prima sarà sempre maggiore della seconda grandezza.

Sieno A, e C le due grandezze e B la terza. Se $A : B > C : B$, e se $B : C > B : A$; in tutti e due i casi $A > C$.

Dimostrazione.

Se A non è maggiore di C, dovrebbe essere 1.° uguale; e in conseguenza le ragioni sarebbero pure uguali, lo che è contro l' ipotesi : 2.° se fosse minore, e perciò la prima sarebbe minore della seconda ragione, e al contrario : ciò che è pure contro l' ipotesi. Dunque è vero ecc.

Teorema 10.°

Le ragioni uguali ad una terza sono uguali fra di loro.

Se la ragione	$A : B = X : Y$.
E la ragione	$C : D = X : X$.
Sarà la ragione di	$A : B = C : D$.
Come se si dicesse	$12 : 4 = 3 : 1$
	$15 : 5 = 3 : 1$.
Dunque	$12 : 4 = 15 : 5$.

Dimostrazione.

Essendo le ragioni uguali, uguali sono pure i loro esponenti; ma per notissimo assioma le grandezze uguali ad una terza sono uguali tra di loro. Dunque ec.

Teorema 11.°

Se le componenti una ragione sono rispettivamente uguali alle componenti un' altra ragione; ancorchè fosse perturbato l'ordine delle ragioni, le composte saranno sempre uguali.

Sieno

1.ª Serie di grandezze.	2.ª Serie di grandezze.
A : B	a : b
C : D	c : d
E : F	e : f.

Sarà $$\frac{A \times C \times E}{B \times D \times F} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$$

$$6 \overset{2}{:} 3 \qquad 4 \overset{2}{:} 2$$
$$8 \overset{4}{:} 2 \qquad 12 \overset{4}{:} 3$$
$$3 \overset{3}{:} 1 \qquad 6 \overset{3}{:} 2.$$

Sarà $6 \times 8 \times 3 : 3 \times 2 \times 1 = 4 \times 12 \times 6 : 2 \times 3 \times 2.$

Dimostrazione.

Se vi ricordate come risulti la ragione composta, niente è in Matematica che possa venirvi più chiaro della presente dimostrazione. La ragion composta si ottiene col prodotto di tutte le *quantità*, od *esponenti* delle ragioni semplici. Se dunque per ipotesi le componenti di una, sono uguali alle componenti dell' altra; qualunque fosse l' ordine e la loro disposizione, sempre risultano *prodotti uguali*, ovvero ragioni composte uguali. Così nell' addotto esempio numerico essendo 2, 4, e 3 gli esponenti delle ragioni della prima serie, e 2, 4, 3 gli esponenti della seconda. Sarà sempre

$$2 \times 4 \times 3 = \begin{cases} 2 \times 4 \times 3 \\ 4 \times 2 \times 3 \text{ ec.} \\ 3 \times 2 \times 4. \end{cases}$$

Dunque ec.

Teorema 12.°

La ragione di una prima a una terza quantità è *composta* dalle ragioni della prima alla seconda, e dalla seconda alla terza.

Questo Teorema può essere espresso del seguente modo. Il quoto di un primo per un terzo numero pareggia il prodotto de' quoti del primo diviso pel secondo, e del secondo diviso pel terzo.

Sieno A, B, C le tre grandezze. Sarà

$$A : C = A : B \times B : C$$

ovvero riducendo le ragioni in frazioni

$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}.$$

Sieno 12, 6, 2. Sarà

$$12 : 2 = 12 : 6 \times 6 : 2;$$

ovvero

$$\frac{12}{2} = \frac{12}{6} \times \frac{6}{2}.$$

Dimostrazione.

Avendo trasformato la ragion composta nella seguente espressione $\frac{12}{2} = \frac{12}{6} \times \frac{6}{2}$: ricordatevi che ne' rotti possono essere tolte quelle quantità che si considerano come elementi di prodotti, le quali appartengono al numeratore e al denominatore.

Sicchè nella espressione $\frac{12}{2} = \frac{12}{6} \times \frac{6}{2}$, la quantità 6 è comune al numeratore e al denominatore. Dunque riducesi che $\frac{12}{2} = \frac{12}{2}$; cioè a perfetta identità. Ma il primo $\frac{12}{2}$ è la ragione della prima nella terza grandezza: l'altro $\frac{12}{2}$ è la composta della prima nella seconda ragione. Dunque cc.

Teorema 13.°

Se vi sieno quante grandezze si vogliano, la ragione della prima all'ultima è sempre *composta* da tutte le ragioni costituenti le grandezze, secondo l'ordine, che giacciono.

Sieno A , B , C , D , E. Sarà

$$A : E = A : B \times B : C \times C : D \times D : E.$$

Dimostrazione.

Questa dimostrazione riducesi a quella dell'antecedente Teorema. Cioè $\frac{A}{E} = \frac{A}{E}$: ovvero la ragione della prima all'ultima, essere uguale alla composta di tutte le ragioni che nascono dalle grandezze date, messa la prima per antecedente.

Sarebbe dunque in tal caso

$$\frac{A}{E} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} \times \frac{D}{E} = \frac{A}{E}.$$

Ricordatevi che ne' rotti eliminansi le quantità comuni al numeratore, ed al denominatore.

Teorema 14.°

Se tre grandezze sono continuamente proporzionali: la ragione della prima alla terza dicesi duplicata di una di esse: quella della prima alla quarta, triplicata ec.

Sieno

$$:: 12 : 6 : 3. \text{ Sarà } 12 : 3 :: (12)^2 : (6)^2 :: 144 : 36.$$

Dimostrazione.

La ragione di 12 : 3 per quello che abbiamo detto nello antecedente teorema è uguale 12 : 6 × 6 : 3. Ma alla ragione di 6 : 3 possiamo sostituire l'equivalente di 12 : 6. Dunque

$$12 : 3 = 12 : 6 \times 12 : 6 = 144 : 36;$$

cioè duplicata, composta di due ragioni uguali, dei quadrati ec.

Sieno adesso $:: 24 : 12 : 6 : 3.$

Sarà $$24 : 3 = \begin{cases} 24 : 12 \times \\ 12 : 6 \times \\ 6 : 3. \end{cases}$$

Ma alle ragioni di 12 : 6, e di 6 : 3 può essere sostituita l'uguale ragione di 24 : 12. Dunque

$$24 : 3 = \begin{cases} 24 : 12 \times \\ 24 : 12 \times \\ 24 : 12. \end{cases}$$

Ovvero

$$24 : 3 = 24 \times 24 \times 24 : 12 \times 12 \times 12 :$$

ovvero triplicata, cubica.

Corollario 1.° Dunque la ragione di una prima ad una quinta grandezza continuamente proporzionale sarà quadruplicata ec.

Corollario 2.° Dunque la ragione dei quadrati dicesi duplicata, quella dei cubi dicesi triplicata, e così discorrendo.

Corollario 3.° Dunque se una ragione componesi di una diretta, e di una inversa, nasce l'uguaglianza. Sia $6 : 2 \times 1 : 3$; sarà $6 \times 1 : 2 \times 3$ ovvero $6 : 6$ ed inversamente.

Corollario 4.° Quindi se più ragioni componenti sono uguali ad altrettante inverse, la composta che risulta da quelle, e da queste sono ancor di uguaglianza. Tutto è chiaro, ed ha bisogno più di essere capito, che esemplificato.

Teorema 15.°

Se una ragione semplice è uguale ad un'altra ragione semplice, anche la duplicata, la triplicata ec. di quella sarà uguale alla duplicata, triplicata ec. di questa: se maggiore, anche la duplicata, triplicata ec. sarà maggiore; e se minore, anche la duplicata, triplicata ec. sarà minore.

Se

$A : B = C : D$; sarà $A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$; $A^3 : B^3 :: C^3 : D^3$ ec.

Se

$A : B > C : D$; sarà $A^2 : B^2 > C^2 : D^2$; $A^3 : B^3 > C^3 : D^3$ ec.

Se

$A : B < C : D$: sarà $A^2 : B^2 < C^2 : D^2$; $A^3 : B^3 < C^3 : D^3$ ec.

Per esempio

$8 : 4 = 6 : 3$; sarà $(8)^2 : (4)^2 = (6)^2 : (3)^2$; $(8)^3 : (4)^3 = (6)^3 : (3)^3$

$8 : 2 > 6 : 3$; sarà $(8)^2 : (2)^2 > (6)^2 : (3)^2$; $(8)^3 : (2)^3 > (6)^3 : (3)^3$

$8 : 4 < 6 : 2$; sarà $(8)^2 : (4)^2 < (6)^2 : (2)^2$; $(8)^3 : (4)^3 < (6)^3 : (2)^3$

Dimostrazione.

Poichè essendo la ragione composta il prodotto di più ragioni semplici: se due ragioni uguali tra loro sono uguali a due altre ragioni; sarà la composta da quelle ovvero la duplicata, uguale alla composta da queste, ovvero alla dupli-

cata. E se le ragioni uguali tra loro sono poi maggiori delle altre due; sarà la composta da quella, ovvero la duplicata, maggiore della composta di queste, ovvero della duplicata. E se è minore la semplice della semplice; sarà pure la duplicata di quella, minore della duplicata di questa ec.

Teorema 16.

Se la duplicata, la triplicata ec. di una ragione è uguale alla duplicata, alla triplicata ec. di un' altra; sarà la semplice corrispondente alla prima uguale alla semplice corrispondente alla seconda; se maggiore, maggiore; se minore, minore.

Se

$A^2 : B^2 = C^2 : D^2$; $A^3 : B^3 = C^3 : D^3$ ec.; sarà $A : B = C : D$.

Se

$64 : 16 = 36 : 9$; $512 : 64 = 216 : 29$ ec.; sarà $8 : 4 = 6 : 3$.

Dimostrazione.

Le duplicate, le triplicate ec. sono il prodotto di due, tre ragioni uguali ec. Se dunque per ipotesi le composte sono uguali tra loro, anche tra loro debbono essere uguali le componenti. Cioè dall' uguaglianza delle duplicate, triplicate ec. può dedursi l' uguaglianza delle ragioni semplici.

Quindi se maggiore la duplicata, o minore; maggiore o minore sarà ancora la semplice.

Teorema 17.

Se quattro numeri sono proporzionali, invertendo i termini anche saranno proporzionali, mutandosi però l' esponente della ragione.

Se $A : B :: C : D$, sara $B : A :: D : C$.

Sieno A, B, C, D rispettivamente uguali $8, 4, 6, 3$.

Dunque se $8 : 4 :: 6 : 3$; sarà $4 : 8 :: 3 : 6$.

Dimostrazione

Della prima parte.

Essendo $8 : 4 :: 6 : 3$ sarà $8 \times 3 = 4 \times 6$.

E commutando i prodotti, sarà

$$4 \times 6 = 8 \times 3.$$

E riducendo l'uguaglianza in proporzione, facendo che i termini del primo prodotto stiano negli estremi, e quei dell'altro nel medio sarà

$$4 : 8 :: 3 : 6.$$

Dimostrazione

Della seconda parte.

Le ragioni della prima proporzione sono

$$\frac{8}{4}, \frac{6}{3}.$$

Le ragioni della proporzione inversa sono

$$\frac{4}{8}, \frac{3}{6}.$$

E sa ognuno $\frac{8}{4} > \frac{4}{8}$: ch'è quanto dire, invertendo i termini della proporzione, nascere una nuova proporzione, perchè cambiasi il rapporto de' termini.

Avvertimento. Questa seconda parte è applicabile per tutti i casi delle seguenti trasformazioni.

Teorema 18.

Se quattro grandezze sono proporzionali; *dividendo*, saranno anche proporzionali, mutandosi però l'esponente delle ragioni.

Se $A : B :: C : D$, sarà $A - B : B :: C - D : D$.

Se per esempio

$12 : 3 :: 8 : 2$; sarà $12 - 3 : 3 :: 8 - 2 : 2$; ovvero $9 : 3 :: 6 : 2$.

Dimostrazione.

Agli antecedenti 12, e 8 sostituiscansi le parti uguali a 3 e 2 ec.

Sarà $3+3+3+3:3::2+2+2+2:2$.

Onde togliendo una parte del primo, ed un'altra al secondo.

Sarà

$3+3+3:3::2+2+2:2$; ovvero $6:3::6:2$;

ovvero secondo che ci eravamo proposto

$$12-3:3::8-2:2.$$

Teorema 19.

Se quattro grandezze sono proporzionali, componendo i termini anche saranno proporzionali, mutandosi però l'esponente delle ragioni.

Se $A:B::C:D$; sarà $A+B:B::C+D:D$.

Se

$12:3::8:2$; sarà $12+3:3::8+2:2$, ovvero $15:3::10:2$.

Dimostrazione.

Essendo

$12:3::8:2$; sarà $3+3+3+3:3::2+2+2+2:2$;

e aggiungendo altro 3 al primo antecedente, e altro 2 al secondo, sarà

$$3+3+3+3+3:3::2+2+2+2+2:2$$

ovvero $15:3::10:2$ ovvero $12+3:3::8+2:2$.

Teorema 20.

Se quattro grandezze sono proporzionali, anche convertendo i termini, resteranno proporzionali, mutandosi però il denominatore delle ragioni.

Se $A:B::C:D$; sarà $A:A-D::C:C-D$.

Se $12:3::8:2$; sarà $12:9::8:6$.

Dimostrazione.

Per ipotesi abbiamo che

$$12 : 3 :: 8 : 2.$$

Dunque, per l'uguaglianza delle ragioni, 12 contiene 3 quante volte 8 contiene 2. Onde

$$12 : 12 - 3 :: 8 : 8 - 2.$$

Ch' è quanto dire $12 : 9 :: 8 : 6.$

Teorema 21.

Se quattro grandezze sono proporzionali, il primo antecedente sta alla somma di sè stesso col suo conseguente, come il secondo antecedente alla somma di sè stesso col suo conseguente.

Se $A : B :: C : D$; sarà $A : A + B :: C : C + D.$

$8 : 4 :: 6 : 3$; sarà $8 : 8 + 4 :: 6 : 6 + 3$; ovvero $8 : 12 :: 6 : 9.$

Dimostrazione.

Per ipotesi $8 : 4 :: 6 : 3.$

Invertendo $4 : 8 :: 3 : 6.$

Componendo $4 + 8 : 8 :: 3 + 6 : 6.$

Di nuovo invert. $8 : 8 + 4 :: 6 : 6 + 3.$

Ovvero $8 : 12 :: 6 : 9.$

Come avevamo promesso.

Teorema 22.

Se quattro grandezze sono proporzionali, permutando saranno anche proporzionali, mutandosi però il denominatore delle ragioni.

Se $A : B :: C : D.$ Sarà $A : C :: B : D.$

Se $12 : 3 :: 8 : 2.$ Sarà $12 : 8 :: 3 : 2.$

Dimostrazione.

Per ipotesi $12 : 3 :: 8 : 2,$

Dunque la ragione di

$$12 : 8 = 12 : 3 \times 3 : 8.$$

E parimenti quella di

$$3 : 2 = 3 : 8 \times 8 : 2.$$

Ma le componenti di una sono perturbatamente uguali alla componenti dell'altra, e perciò le composte sono uguali.

Dunque la ragione di

$$12 : 8 = 3 : 2 \text{ ovvero } 12 : 8 :: 3 : 2.$$

Teorema 23.

Le metà, le terze, le quarte..... le centesime parti di due grandezze sono proporzionali coi tutti.

Sieno T, t; sarà $T : t :: \frac{T}{2} : \frac{t}{2} : \frac{T}{3} : \frac{t}{3} :: \frac{T}{1000} : \frac{t}{1000}$.

Sieno 24, e 20 le grandezze. Sarà 24 : 20 :: 12 : 10 : 6 : 5 ec.

Dimostrazione.

Il tutto 24 contiene 12, quante volte 20 contiene 10. Onde

$$24 : 12 :: 20 : 10.$$

E permutando 24 : 20 :: 12 : 10.C.B.D.

Teorema 24.

Se quattro grandezze sono proporzionali, e la prima è massima, l'ultima sarà assolutamente minima.

Sieno A : B :: C : D. Se A è massima, D è minima.

Dimostrazione.

Essendo per ipotesi A : B :: C : D; ed essendo A massima, naturalmente $D < C$.

Or dunque permutando A : C :: B : D; dunque D è minore pure di B.

Ma per ipotesi è minore di A; dunqne è minore di tutte, minima.

Teorema 25.

Se quattro grandezze sono proporzionali: la somma degli antecedenti sta alla somma de' conseguenti, come un' antecedente al suo conseguente.

Sieno A : B::C : D ; sarà A + C : B + D::A : B::C : D.

12 : 4::9 : 3 ; sarà 12 + 9 : 4 + 3::12 : 4::9 : 3 ;

ovvero 21 : 7 :: 12 : 4.

Dimostrazione.

Per ipotesi 12 : 4 :: 9 : 3.

E permutando 12 : 9 :: 4 : 3.

E componendo 12 + 9 : 9::4 + 3 : 3.

E di nuovo permut.

12+9 : 4+3::9 : 3::12 : 4 ; ovvero 21 : 7::9 : 3::12 : 4.

Teorema 26.

Se quattro grandezze sono proporzionali la differenza degli antecedenti sta alla differenza de' conseguenti, come un' antecedente al proprio conseguente.

Sieno A : B::C : D ; sarà A—C : B—D::A : B::C : D.

Sieno 12 : 4::9 : 3 ; sarà 12—9 : 4—3::12 : 4::9 : 3 ;

Ovvero 3 : 1::12 : 4::9 : 3.

Dimostrazione.

Per ipotesi 12 : 4 :: 9 : 3.

Permutando 12 : 9 :: 4 : 3.

Dividendo 12—9 : 4—3::9 : 3::12 : 4.C.B.D.

Teorema 27.

Se quattro grandezze sono proporzionali la somma della massima è minima è maggiore della somma delle altre due.

Sieno A : B::C : D ; e siano A massima, D minima ;

Sarà A + D > B + C

24 : 12::8 : 4 sarà 24 + 4 > 12 + 8.

Dimostrazione.

La dimostrazione numerica è intuitivissima : perchè vede ognuno che 24 + 4 > 12 + 8. Ciò non ostante per non incorrere in qualche fallacia di petizione, e per non dirsi, che manca

la propria dimostrazione matematica: ecco come pensiamo all'uopo; quantunque questa dimostrazione a principianti sembri più soddisfacente in linee.

Per ipotesi $24 : 12 :: 8 : 4$.

Permutando sarà $24 : 8 :: 12 : 4$.

E convertendo sarà $24 : 16 :: 12 : 8$.

Ma essendo per ipotesi $24 > 12$; sarà pure $16 > 8$.

Or dunque se $16 > 8$

Agg. $8 + 4 \quad 8 + 4$ agg.

Sarà $16 + 8 + 4 > 8 + 8 + 4$

Ovvero sostituendo

$$24 + 4 > 12 + 8 . \text{C.B.D.}$$

Teorema 23.

Se più grandezze hanno ragioni ordinate, o perturbate con altrettante grandezze, le grandezze estreme formeranno una proporzione.

Sieno R, S, X, Y, Z che hanno ragioni ordinate con r, s, x, y, z.

Sarà $R : Z :: r : z$.

Esempio numerico.

Sieno

Ragioni ordinate.	Ragioni perturbate.
$24^2\ 12^4\ 3^3\ 1$	$24^2\ 12^4\ 3^3\ 1$
$48^2\ 24^4\ 6^3\ 2$	$48^3\ 16^2\ 8^4\ 2$

Sarà

$24 : 1 :: 48 : 2$	$24 : 1 :: 48 : 2$.

Dimostrazione.

La ragione di $24 : 1$ è composta da tre ragioni aventi per denominatore 2, 4, 3. Ma nelle ordinate, e nelle perturbate ragioni, la ragione di $48 : 2$ è anche composta da ragioni aventi 3, 2, 4. Dunque

$$24 : 1 = 48 : 2. \quad \text{C.B.D.}$$

Teorema 29.

Se più grandezze hanno ragioni ordinate ad altrettante grandezze: la somma delle prime sta all' ultima, come la somma delle seconde all' ultima.

Sieno A, B, C che hanno ragioni ordinate colle grandezze x, y, z. Sarà

$$A + B : C :: x + y : z$$

Sieno $12^{2}\ 6^{3}\ 2$

$18^{2}\ 9^{3}\ 3.$

Sarà $12 + 6 : 2 :: 18 + 9 : 3$, ovvero $18 : 2 :: 27 : 3$.

Dimostrazione.

Per ipotesi $12 : 6$

$::$

$18 : 9$

ovvero comp. $18 : 6$

$::$

$27 : 9.$

Ma nella prima serie, $6 : 2$ come nella seconda $9 : 3$.

Sicchè $18 : 6 :: 27 : 9.$

E dippiù $6 : 2 :: 9 : 3.$

$$12 + 6 : 6 :: 18 + 9 : 9.$$

Dunque, ordinando le ragioni, si vede che le grandezze 18, 6, 2 hanno ragioni ordinate con le altre grandezze 27, 9, 3. E perciò la prima, e le ultime (per la prop. prec.) saranno proporzionali, cioè

$$18 : 2 :: 27 : 3.$$

E indicando il teorema colle lettere iniziali. Sarà

$$S : U :: s : u.$$

Teorema 30.

Se più grandezze hanno ragioni uguali con altrettante grandezze: la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un' antecedente al proprio conseguente.

Sieno $\begin{matrix} A, & B, & C, & D, & E \\ r, & s, & x, & y, & z \end{matrix}$ le grandezze

E sieno $A : r = B : s = C : x = D : y = E : z$.

Sarà $A+B+C+D+E : r+s+x+y+z :: A : r :: D : y$.

Per esempio

$$\begin{matrix} 6, & 8, & 12, & 10 \\ 3, & 4, & 6, & 5. \end{matrix}$$

Sarà $6+8+12+10 : 3+4+6+5 :: 6 : 3$

ovvero $36 : 18 :: 6 : 3$.

Dimostrazione.

Se si riflette, le grandezze

$$6, 8, 12, 10$$

hanno ragioni ordinate colle altre

$$3, 4, 6, 5.$$

Onde $S : U :: s : u$, e permutando

$$S : s :: U : u.C.B.D.$$

Teorema 31.

Se quattro grandezze sono proporzionali, e altrettante sono tali, che due trovansi proporzionali cogli antecedenti della proporzione data, e due altre trovansi proporzionali co' conseguenti della medesima: queste altre quattro grandezze sono ancora proporzionali.

Sieno $A : B :: C : D$.

E sieno x, y, z, v

quattro altre grandezze che

$$x : A :: z : C.$$

E inoltre $y : B :: v : D$.

Io dico che $x : y :: z : v$.

Sieno $\begin{matrix} 8 : 4 :: 2 : 1 \\ 24, 12, 6, 3 \end{matrix}$ le grandezze.

E siano $24 : 8 :: 6 : 2$
$12 : 4 :: 3 : 1.$

Sarà $24 : 12 :: 6 : 3.$

Dimostrazione.

Per ipotesi abbiamo le tre seguenti proporzioni

1.° $8 : 4 :: 2 : 1$
2.° $24 : 8 :: 6 : 2$
3.° $12 : 4 :: 3 : 1.$

Ed invertendo quest' nltima sarà

$$4 : 12 :: 1 : 3.$$

Sicchè le qnattro grandezze 24, 8, 4, 12 delle ultime due ragioni sono in ordinata ragione colle quattro 6, 2, 1, 3 delle medesime.

E perciò le prime e le ultime sono proporzionali, cioè

$$24 : 12 :: 6 : 3.$$

Teorema 32.

Se due proporzioni hanno identità ne'conseguenti, la somma degli antecedenti della prima sta al conseguente comune, come la somma degli antecedenti della seconda sta al loro conseguente comune: e la differenza degli antecedenti della prima proporzione sta al loro conseguente comune, come la differenza degli antecedenti della seconda sta anche al loro conseguente comune. Sieno

A. C.
X. Y.
B. D.

Cioè $A : X :: C : Y$ ed inoltre $B : X : D : Y.$

Sarà $A + B : X :: C + D : Y$;

ed anche $A - B : X :: C - D : Y$

ovvero 18 24
6 8
12 16

Cioè $18 : 6 :: 24 : 8$. Ed anche $12 : 6 :: 16 : 8$.

Sarà $18 + 12 : 6 :: 24 + 16 : 8$;

E inoltre $18 - 12 : 6 : 24 - 16 : 8$.

Dimostrazione

Della prima parte.

Per ipotesi $18 : 6 :: 24 : 8$.

E $12 : 6 :: 16 : 8$.

Ed invertendo quest' ultima ragione

$$6 : 12 :: 8 : 16.$$

Sicchè le grandezze 18, 6, 12

hanno ragione ordinata colle tre

$$24, 8, 16.$$

Sicchè le prime, e le ultime saranno proporzionali, cioè

$$18 : 12 :: 24 : 16.$$

E componendo sarà

$$18 + 12 : 12 :: 24 + 16 : 16$$

ovvero sommando $30 : 12 :: 40 : 16$.

Ma $12 : 6 :: 16 : 8$.

Dunque le tre grandezze 30, 12, 6, hanno ragioni ordinate colle tre grandezze 40, 16, 8 onde

$30 : 6 :: 40 : 8$ ovvero $18 + 12 : 6 :: 24 + 16 : 3$.

Similmente si dimostra la seconda parte.

LEZIONE XXIV.

1.° *Progressione Geometrica, e sue specie.* Una serie di grandezze, qualunque fossero, procedenti colla medesima ragione geometrica, ovvero di *continenza*, dicesi *Progressione Geometrica*. La quale se procede con aumento de' termini, dicesi *Crescente*: se con diminuzione di essi, dicesi *Decrescente*. Tali sarebbero

Serie Crescente. $\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$ ec.

Serie Decrescente. $\div\div 128 : 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2$.

2.° In ogni progressione geometrica un termine qualunque è uguale al primo termine della progressione data, diviso pel denominatore comune delle ragioni elevato alla potenza determinata dal numero dei termini che precedono il termine dato.

Sia per esempio

$$\div\div 2 : 4 : 8 : x : y : z \text{ serie crescente.}$$

Essendo noto 2 primo termine; ed essendo noto ancora

$\frac{2}{4}$ ovvero $\frac{1}{2}$, denominatore della ragione.

Ed x dovendo stare al quarto termine.

Sarà $x = 2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 : \frac{1}{8} = \frac{2}{1} \times \frac{8}{1} = \frac{16}{1} = 16.$

Similmente si determinano y, z cioè quinto, e sesto termine.

E sia $\div\div 32 : 16 : 8 : x : y : z$ progressione decrescente.

Essendo noti 32 primo termine, 2 denominatore della ragione; per avere il quarto termine.

Sarà $x = 32 : (2)^3 = \frac{32}{1} : \frac{8}{1} = \frac{32}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{32}{8} = 4.$

Similmente si determinano y, z.

Dimostrazione.

Essendo la progressione una serie di grandezze procedenti con eguali ragioni; Saranno della prima serie data

$$1.^{\circ}\ \frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$2.^{\circ}\ \frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

$$3.^{\circ}\ \frac{8}{x}=\frac{1}{2}.$$

Or essendo nella prima ragione $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Si può considerare l' antecedente 2 come dividendo, 4 come divisore, $\frac{1}{2}$ come quoto. Sicchè il 2.° termine della progressione

$$4=2:\frac{1}{2}=\frac{2}{1}\times\frac{2}{1}.$$

Nella medesima progressione poi il secondo termine

$$8=4:\frac{1}{2}.\ \text{Ma}\ 4=2:\frac{1}{2}.$$

Sicchè $\quad 8=2:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=2:\frac{1}{4}=2:\left(\frac{1}{2}\right)^{2}.$

Similmente si dimostra

$$x=2:\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{2}{1}:\frac{1}{8}=\frac{2}{1}\times\frac{8}{1}=16.$$

Sia inoltre la Progressione Decrescente

$$\div\div\ 64:32:16:x:y:z.$$

Essendo noti 64 primo termine, 2 denominatore della ragione, x che deve stare al quarto termine; sarà

$$x=64:(2)^{3}=64:8;\ \text{e perciò}=8.$$

Similmente si dimostra essere 4, e 2 i valori di y, z.

3.° Sicchè se con P dinotisi il primo termine di una Progressione, con $\frac{r}{m}$ l'esponente della ragione, con x un termine qualunque che vorrebbesi determinare, con n il numero de' termini costituenti la Progressione fino ad x; sarà

$$x = P : \left(\frac{r}{m}\right)^{n-1} = P \times \frac{m^{n-1}}{r^{n-1}}.$$

4.° Determinare la somma di tutt'i termini componenti una Progressione Geometrica. Supponiamo che

$$\text{Sieno} \begin{cases} S = \text{alla somma.} \\ P = \text{al primo termine.} \\ U = \text{all'ultimo.} \end{cases}$$

$$\frac{R}{M} = \text{alla ragione de' termini.}$$

Saranno per conseguenza

$S - U$ tutti gli antecedenti

$S - P$ tutt'i conseguenti.

Onde $S - U : S - P :: R : M$;

cioè la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

E pareggiando il prodotto degli estremi a quello de' medii,

Sarà $MS - MU = RS - RP$;

ovvero $MS - RS = MU - RP$;

ovvero $(M - R)S = MU - RP$;

ovvero $S = \frac{MU - RP}{M - R}$ se è crescente

$S = \frac{RP - MU}{R - M}$ se è decrescente.

In tutt'i casi però: la somma dei termini costituenti una progressione geometrica è uguale alla differenza de' prodotti, uno

del conseguente della ragione nell' ultimo termine della progressione, l' altro dell' antecedente della ragione nel primo della progressione, divisa per la differenza dei termini della quantità od esponente della ragione.

Esempii.

Sia la progressione crescente

$$:: 3 : 9 : 27 : 81 : 243$$

$$\text{saranno} \begin{cases} P = 3 \\ U = 243 \\ \frac{R}{M} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sicchè $$S = \frac{729 - 3}{2} = \frac{726}{2} = 363.$$

E sia la progressione decrescente

$$:: 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1.$$

$$\text{Saranno} \begin{cases} P = 64 \\ U = 1 \\ \frac{R}{M} = \frac{2}{1}. \end{cases}$$

Sarà $$S = \frac{128 - 1}{1} = 127.$$

5.° Se in una progressione prendansi numeri egualmente distanti tra di essi, nascerà una nuova progressione geometrica. Sia per esempio

$$:: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 246 : 492 \text{ ecc.}$$

Se prendansi 1, 4, 16, 64, 246 ecc.

Sarà pure $:: 1 : 4 : 16 : 64 : 246$ ecc.

E lo stesso avverrebbe, se la serie fosse decrescente.

Dimostrazione.

I termini che si prendono, per ipotesi sono equidistanti tra di loro. Dunque formano anch'essi altrettante ragioni, composte da ragioni semplici eguali in quanto al numero, e uguali in quanto all'esponente. Ma quando le componenti sono uguali sotto tutti e due questi rapporti, le composte anche sono uguali. Dunque ec.

6.° Anzi se tra i termini di una progressione immettasi egual numero di medii geometricamente proporzionali, nascerà ancora una nuova progressione geometrica. Sia per esempio

$$\because 1 : 4 : 8 : 16 : 32 \text{ ecc.}$$

Tra 1, e 4 immettansi A, B, C, medî geometricamente proporzionali.
Tra 4, e 8 immettansi D, E, F.
Tra 8, e 16 immettansi G, H, K.
Tra 16, e 32 immettansi L, M, N.
Nascerà la seguente progressione Geometrica crescente

$$\because 1 : A : B : C : 2 : D : E : F : 4 : G : H : K : 8 : L : M : N : 16 \text{ ecc.}$$

Dimostrazione.

Essendo i numeri immessi tra i termini delle ragioni tutti eguali di numero, e medî proporzionali: Ogni ragione della serie fondamentale si è spartita in egual numero di ragioni uguali. Ma quando le composte sono uguali, ed uguali le componenti, tutto il processo delle ragioni è geometrico: cioè forma una progressione. Dunque ec.

7.° Se una progressione constituiscasi con un numero elevato successivamente a potenza: i numeri esprimenti le potenze formeranno una serie di ragioni aritmetiche. E al contrario.

Per esempio sia 2 il numero; il quale elevato successivamente a potenza formi la progressione

$$\because (2)^1 : (2)^2 : (2)^3 : (2)^4 : (2)^5 \text{ ec.}$$

E così di ogni altro: gli esponenti delle potenze formeranno una serie di ragioni aritmetiche.

Dimostrazione.

1.° Essendo per ipotesi

$$\because (2)^1 : (2)^2 : (2)^3$$

continuamente proporzionali sarà

$$(2)^1 \times (2)^3 = (2)^2 \times (2)^2$$

ovvero $$(2)^{1+3} = (2)^{2+2}.$$

E perchè il 2, primo termine, e base della progressione, è comune: sarà $1 + 3 = 2 + 2$. Ma quando la somma degli estremi è uguale al doppio di quello di mezzo le grandezze sono aritmeticamente proporzionali. Dunque ec.

2.° E sia $$(2)^1 \times (2)^3 = (2)^2 \times (2)^2;$$

convertendo l'uguaglianza in proporzione sarà

$$\because (2)^1 : (2)^2 : (2)^3,$$

che è quanto dire, che quando gli esponenti delle potenze sono in ragione uguale aritmeticamente, in tal caso le grandezze elevate alle potenze successive formeranno una progressione geometrica.

8.° Dunque in quanto a progressioni geometriche abbiamo definito, e spartita nelle sue classi la progressione; abbiamo determinato il valore dell' ultimo termine; della somma dei termini; come nascerebbero da una, infinite altre progressioni, o prendendo termini egualmente distanti, o tra i termini immettendovi egual numero di medî geometricamente proporzionali; finalmente che un numero elevato a potenza successivamente ha tale relazione: che mentre le potenze formano una progressione geometrica; gli esponenti delle potenze formano una serie di eguali ragioni aritmetiche. Tutto questo è sufficiente per chi incomincia lo studio delle Progressioni geometriche.

LEZIONE XXV.

Delle Progressioni Aritmetiche.

1.° Una serie di grandezze, qualunque elle fossero, procedenti colla medesima ragione, ovvero colla medesima differenza, dicesi *Progressione Aritmetica*. La quale sarà *Crescente*, o *Decrescente*; secondo che i termini o aumenteranno, o diminuiranno nella loro quantità. Tali sarebbero

Crescente. ÷ 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19 ec.
Decrescente. ÷ 21.19.17.15.13.11.9.7.5.3.1 ec.

2.° Ogni termine di una progressione aritmetica è uguale al primo termine o diminuito, o aggiunto, secondo che sarà decrescente, o crescente, del prodotto che dà la differenza dei termini nel numero della serie naturale di quanti sono quelli che precedono il termine dato. Così nella serie crescente portata di sopra il VII termine che chiameremo x, sarà

$$x = 1 + (2 \times 6) = 13.$$

Essendo il primo termine 1; e 2 la differenza, i termini che precedono il VII, 6.

E nella seconda il VII termine che pure supporremo x darà

$$x = 21 - (2 \times 6) = 21 - 12 = 9.$$

Essendo 21 il primo termine: 2 la differenza, e 6 il numero de' termini che precede il VII.

Dimostrazione.

Se per poco si rifletta sulla natura di tale progressione, facilmente si potrà rilevare, nella progressione crescente il secondo termine essere uguale al primo se è sommato colla differenza loro. Parimente dunque il terzo termine è uguale al secondo se è sommato colla prima differenza, e più un'altra volta questa differenza. E così andate voi discorrendo. Dunque ogni termine ec.

Nè altrimenti si ragiona se la progressione fosse decrescente.

3.° Quindi se

$$\text{Sieno} \begin{cases} P = \text{dinota il primo termine} \\ d = \text{la differenza comune} \\ n = \text{un numèro qualunque} \\ x = \text{un termine} \end{cases}$$

Per la progressione crescente

Sarà $$x = P + d(n - 1).$$

Per la decrescente

$$x = P - d(n - 1).$$

Queste due formole vi renderanno idonei a determinare qualunque termine di qualunque progressione aritmetica.

E fingendo che in x finisca la progressione, cioè che x sia l'ultimo, sarà

$$U = P \pm d(n - 1).$$

4.° Se in una progressione aritmetica prendansi numeri equidistanti tra loro, questi numeri formeranno una nuova progressione. Sieno per esempio

$$\div 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25$$

$$\div 39.36\ 33.30.27.24.21.18.15.12.9.6.3.$$

Se nell'una, e nell'altra si prenderanno il I, III, V, VII, ec. nasceranno

$$\div 1.5.9.13.17.21.25$$

$$\div 33.27.21.15.9.3.$$

Dimostrazione.

Essendo i termini equidistanti, per ipotesi, le loro differenze saranno somme uguali di differenze anche uguali. Onde la nuova serie costituirà una nuova progressione.

5.° Anzi se tra i termini di una progressione verrà inserito egual numero di medî aritmeticamente proporzionali: La serie che risulta da' primi, e dai medî inseriti, sarà una nuova Progressione aritmetica.

Sia $\div 1.\ 7.\ 13.\ 19.\ 25.\ 31.$

Se tra l' uno, e l' altro s' inseriranno due medî proporzionali, nascerà la nuova progressione

÷ 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25.27.29.31.

Dimostrazione.

Poichè essendosi le ragioni, ovvero le differenze, egualmente spartite co' medî proporzionali: anche le nuove ragioni saranno uguali, e la serie procederà con uguali differenze, cioè sarà vera progressione aritmetica.

6.° Dalla natura della Progressione emerge che la ragione del primo al secondo, è uguale alla ragione del penultimo, all'ultimo. Quindi è facile il capire che la somma del primo e ultimo pareggia quella del secondo, e penultimo; del terzo e antipenultimo; e così di seguito.

7.° Anzi questa conseguenza mena ad un'altra verità, cioè che se i termini della progressione aritmetica sono dispari, la somma del primo e ultimo; del secondo, e penultimo; del terzo, e antipenultimo ec. sono uguali al doppio del termine medio.

8.° Essendo dunque il primo e ultimo uguale al secondo e penultimo e così di seguito. Sarà la somma di tutti uguale alla somma del primo e ultimo ripetuta tante volte quanta è la metà dei termini. Cioè

$$S = (P + U) \times \frac{n}{2}.$$

Sia per esempio

÷ 1.3.5 7.9.11.13.15.17.19.21.23.

$$S = (1 + 23) \times 6 = 24 \times 6 = 144.$$

9.° Dunque abbiamo definito, e spartito nelle sue classi la progressione aritmetica; si è prescritto il modo di determinare il valore d'ogni termine di una progressione; si sono date due formole esprimenti i valori d'ogni termine, e dell'ultimo: si è detto che o prendendonsi numeri equidistanti tra i termini di una progressione, o frammettendonsi egual numero di medî proporzionali, che nascerebbero nuove progressioni: si è determinata la somma di una progressione. In una parola le dottrine riguardanti le progressioni geometriche hanno delle intinità, e delle relazioni assai vicine a quelle che riguardano le progressioni aritmetiche.

LEZIONE XXVI.

De' Logaritmi.

1.° *Origine de' Logaritmi.* Gli epiloghi delle ultime due Lezioni sono stati concepiti per mostrarvi la relazione, e la corrispondenza che serbano fra di esse le progressioni Geometriche, ed Aritmetiche. Senza che io ritorni sul già dimostrato, e che voi attualmente non dovreste ignorare: è ben che mettiate in confronto le dottrine contenute nell'uno, e nell'altro di essi, perchè conveniate essere tale questa corrispondenza tra le progressioni suddette, che quante volte si funziona sopra una di esse, è come se al tempo istesso si funzionasse sull'altra; e che se è nota per es. una proprietà della progressione aritmetica, immediatamente potete dedurre la corrispondente proprietà della progressione geometrica: se sommate in quella, moltiplicate per conseguenza in questa; e se sottraete uno dall'altro termine di quella, dividete uno per l'altro rispettivo termine di questa, e così andate voi discorrendo. Ond'è che per ben prepararvi alla dottrina dei Logaritmi, che intraprendo svilupparvi con la solita chiarezza, e brevità nella presente Lezione, assolutamente richiedesi, che non macchinalmente, ma intendiate da vero questa vicendevole affinità tra le une, e le altre Progressioni, qualunque fossero le continenze di una, e le differenze dell'altra. Il cambiamento di ragioni, o di esponenti non altera le proprietà delle progressioni.

E per aver osservata questa tale corrispondenza, e affinità il Barone Neper Scozzese ne' principî del XVII secolo diede origine alla scienza e alle dottrine de' Logaritmi: quantunque vi è chi pensa che prima di comparire nella Scozia, erano le proprietà Logaritmiche comparse in Alemagna per Stifelio. Keplero dà il merito di questo prodigioso trovato a Giusto Byrge (1). Ma il signor D. Ferdinando de Luca (2) osserva, che l'opera di Byrge rimase inedita per troppa umiltà dell'autore. Neper però (3) nel formare le tavole logaritmiche adottò numeri e supposizioni poco soddisfacenti agli usi di calcolare: onde poi venivano mille difficoltà a chi faceva uso del suo sistema. Non mancano però di quelli, i quali tengono ferma opinione, che Neper istesso avesse indicato la struttura di tavole comodissime, quali le abbiano a giorni nostri. E di fatti il Caravelli nostro (4) dice che Errico Briggs fu il primo, che per consiglio del medesimo Neper

(1) Dizionario Enciclop. di Lalande ec. Artic. Logaritmo.
(2) Prefazione agli elementi di Trigon.
(3) Dizionario suddetto.
(4) Trattato di Logaritmi parag. 36.

sia riuscito a costruire tavole della più desiderata esattezza. Adriano Ulacq camminò sulle orme di Briggs: e diede quelle sue tavole, che per moltissimo tempo erano come l'oracolo de' calcoli appartenenti a questo genere di numeri. Ed esse venivano comodissime a tutti, ed erano universalmente adottate. Quantunque leggesi nel Dizionario da noi citato (1) « Gregori, Mercator, Newton, Halley, Cotes, e Taylor ec. hanno dati varî metodi per la costruzione delle tavole dei logaritmi, che possono vedersi nelle *Transazioni Filosofiche:* » nondimeno le tavole di Ulacq tennero sempre maggioranza e primato.

Ma trovatasi per queste tali ricerche una via più breve e più facile della via battuta, specialmente coll'uso e coll'aiuto di una serie infinita (2), comparvero alla luce tavole assai comode, precise, utili, specialmente per opera di Gardiner, Depercieux (3): e non v'è novizio in matematica, il quale non sappia pure in quanta estimazione si fossero fino adesso tenute le tavole di Gardiner.

In questi ultimi tempi però sono venuti in moltissimo pregio le tavole di Girolamo de Lalande contenenti sette caratteri decimali, ed eseguite per F. C. Marie. Crediamo dunque convenevole, per non dir cosa necessaria alla gioventù che impara tale teorica, ed abbada precipuamente alla esecuzione e alla esattezza razionale di siffatte operazioni, adoperare di esse in queste nostre istituzioni. Quantunque per chi impara tale dottrina, e prescinde da ogni pratica applicazione, è indifferente che il metodo rilevisi coll'uso delle tavole logaritmiche di chiunque fosse l'Autore.

2.° *Definizione del logaritmo.* Ogni termine di una progressione aritmetica relativamente al termine corrispondente di un'altra progressione geometrica, dicesi *logaritmo.*

Sieno per esempio le due Progressioni

Geom. ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : ec.

Aritm. ÷ 0. 1. 2. 3. 4. ec.

si diranno 0, 1, 2, 3, 4 logaritmi rispettivamente di

1, 10, 100, 1000, 10000, ec.

3.° *Logaritmi iperbolici, e logaritmi tavolari.* Essendo dunque due sistemi logaritmici, uno di Nepero, e l'altro di Briggs: non è fuor di proposito prevenirvi, che i logaritmi di Nepe-

(1) Dizionario di Lalande pag. 318.
(2) Caravelli Tom. IV. per le Guardie Marine.
(3) Montucla tom. II. part. IV. lib. I. ovvero Bossut Dizion. cit. artic. Logarit.

ro, sono altrimenti detti *iperbolici*: e i logaritmi di Briggs sono altrimenti detti *tavolari*. È cosa facilissima rimontare all'origine dell'una e dell'altra denominazione. Dunque i logaritmi de' quali noi faremo uso sono altrimenti detti *tavolari*.

4.° *Riduzione de' logaritmi tavolari agl' iperbolici*. È noto a chiunque si occupa di tali ricerche, qual'è il rapporto de' logaritmi iperbolici a' logaritmi tavolari: i primi stanno a' secondi come 2, 3 ad 1 *approssimativamente*. In conseguenza rendesi facile convertire i logaritmi nostri in logaritmi iperbolici. Poichè moltiplicando ogni nostro logaritmo pel rapporto 2, 3 si avrà nel prodotto un logaritmo iperbolico. Tutta questa riduzione è fondata sulla semplicissima dottrina di trovare il quarto proporzionale in ordine a tre grandezze date (1).

5.° *Conseguenze che derivano dalla definizione del Logaritmo già stabilita*. A due cose però bisogna che un giovinetto abbadi in quanto alle conseguenze che derivano dalla definizione del logaritmo già stabilita. 1.° Che sebbene la progressione aritmetica potesse in infinite guise variare, in quanto che potrebbesi ad una sostituire ogni altra progressione: pur nondimeno è universalmente adottata quella, nella quale il primo termine fosse zero, e la differenza de' termini fosse 1. Ella è tanto facile, quanto è *naturale*, ed è così propriamente chiamata. 2.° D'onde poi deriva, che tutta la serie *aritmetica naturale* nelle tavole logaritmiche è la seguente ÷ 0, 1, 2, 3, 4, ec... Sicchè come il logaritmo di 1 è 0, di 10 è 1, di 100 è 2, di 1000 è 3, di 10000 è 4, così pure deducesi che di 100000 è 5, di 1000000 è 6 ec. ec. Che è quanto dire, che mentre i logaritmi aumentano di una unità, il numero corrispondente nella progressione geometrica è moltiplicato per 10: e che tanto è accrescere il logaritmo di 2, di 3, di 4 unità; quanto moltiplicare il numero corrispondente della progressione geometrica per 100, 1000, 10000. 2.° Non avviene lo stesso però ne' numeri della progressione geometrica: ove, per esempio tra 1 e 10 mancano gl' intermedî 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 che spettano a questa progressione. Non altrimenti avviene tra 10 e 100; tra 100 e 1000 ec. dove mancano i numeri intermedî tra quelli che costituiscono la progressione geometrica.

6.° *La progressione geometrica stabilita non soddisfaceva a tutta la scienza*. Questa considerazione è dunque sufficiente a farvi capire, che qualora la serie geometrica non avesse compresi tutt' i numeri della serie naturale, e si fosse limitata ne' termini della progressione già stabilita, che niuno o pochissimo vantaggio sarebbe ridondato sulle scienze. Mentre è a tutti

(1) Vedi le tavole di Lalande stampate in Napoli pe' Tipi della Sibilla 1833 pag. 8.

noto, che perciò i logaritmi hanno sublimato le matematiche applicate, perchè essi soddisfano a tutt' i numeri possibili. Difatti stando alla serie geometrica stabilita, come, per esempio, avrebbesi potuto o moltiplicare o dividere 523, intermedio tra 100 e 1000, per 87 intermedio tra 10 e 100? Come per uso de' logaritmi conoscere la radice quadrata di 1327 intermedio tra 1000 e 10000?

Fu d' uopo dunque ricavare un' altra progressione più comoda e soddisfacente a' bisogni delle scienze.

Stabilita dunque per mille vantaggi, che ne emergevano, la progressione *fondamentale*

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 ec.

fu d' uopo inserire un' altra, ch' è detta *determinatrice*; la quale racchiudendo tutt' i numeri intermedî tra quelli della progressione fondamentale, o numeri che senza errore sensibile potevansi a quelli sostituire, presentava la facilità e la opportuna occasione di poter colla massima brevità moltiplicare, dividere, levar a potenza, estrarre radici; in una parola eseguire tutte le possibili operazioni sopra tutt' i numeri indistintamente.

7.° *Osservazione essenzialissima.* Essendo dunque *o* il logaritmo di 1; ed 1 il logaritmo di 10; e 2, 3, 4, 5, rispettivamente i logaritmi di 100, 1000, 10000: Cioè essendo

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 ec.

∺ 0, 1. 2. 3. 4, ec.;

chiaramente deducesi, che se tra 1 e 10 della progressione geometrica si trovino i medî proporzionali equivalenti a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; i logaritmi corrispondenti a questi termini nuovi debbono giacere tra i termini della progressione aritmetica o e 1. Ch' è quanto dire, siffatti logaritmi non sono minori di zero, cioè negativi; nè maggiori di 1, nè uguali ad 1. E perciò debbono essere espressi per una frazione decimale, il cui valore è minore di 1. Con simile raziocinio dimostrasi che i numeri intercetti tra 10 e 100 della progressione geometrica debbono avere per logaritmi numeri intercetti tra 1 e 2 della progressione aritmetica. E così andate voi discorrendo.

8.° *Definizione del canone logaritmico.* La serie geometrica e la serie aritmetica si sono ordinate una a canto dell' altra in alcune carte, che sono dette *tavole*, situando i numeri di una verticalmente tra loro uno dopo l' altro, e verticalmente pure uno dopo l' altro tra loro situando i numeri dell' altra. Le tavole logaritmiche dunque constano di due serie vertica-

li, una contenente tutt' i numeri della serie naturale da 1 fino a 10000; e l'altra contenente altrettanti termini procedenti in corrispondenza de' primi, e medî aritmeticamente proporzionali tra 1 e 2, tra 2 e 3, tra 3 e 4. La serie geometrica è sempre nella tavola a dritta dell'aritmetica: cioè i numeri sono registrati a diritta de' logaritmi. Or a queste tavole si dà il nome di Canone Logaritmico.

9.° *Caratteristica de' Logaritmi.* Dovendo ne' logaritmi entrare ordinariamente i decimali, sa ognuno che in siffatti numeri sono gl' interi spartiti dalle cifre decimali per una virgoletta. Or ne' logaritmi quella cifra che giace nel luogo degl' interi dicesi *Caratteristica.* Perchè considerasi come il solo carattere, che basta in certo modo a determinare il numero che corrisponde a un logaritmo dato. Sicchè dando una semplice occhiata alle tavole, vedete che la *caratteristica* è sufficiente tante volte a determinare *presso a poco* il numero che si va cercando. Si dà poi alla parte decimale il nome di *Mantissa*, ossia *aggiunta.*

10. *Formazione del Canone Logaritmico.* Se un giovinetto volesse darsi la pena di costruire un Canone logaritmico; egli dovrebbe istituire due serie; una contenente i numeri della serie naturale; e l'altra, contenente altrettante medie aritmeticamente proporzionali tra i termini di una progressione aritmetica qualunque, quanti sono i numeri presi nella serie naturale. Ma siccome questi sono lavori così maestrevolmente eseguiti, che è quasi impossibile averli di più desiderata esattezza: perciò vediamo inutile ritornare sulle regole della costruzione di siffatto canone. Ed invece, volgiamo la mente al canone registrato da altri, per adoperarlo con certezza e intelligenza ne' problemi spettanti alla *quantità.* È d'nopo però che stabiliamo certi teoremi, pria che procediamo alla soluzione de' problemi per via de' logaritmi. E tutto colla massima chiarezza e brevità; se pure non ci tradisce il desiderio di esser tali.

11. Il logaritmo del prodotto di due numeri è un numero che risulta dalla somma de' logaritmi de' fattori da' quali il prodotto risulta.

Sia per esempio $12 = \frac{3.4}{6.2}$: sarà in conseguenza

$$l12 = \frac{l3 + l4}{l6 + l2}.$$

Dimostrazione.

Per ipotesi $12 = 4\ 3.$

Or convertendo l'uguaglianza in proporzione, sarà

$$12 : 4 :: 3 : 1.$$

Ma ai numeri della progressione geometrica possiamo sostituire i numeri della progressione aritmetica: perchè come quelli sono geometricamente tra loro, così sono questi aritmeticamente anche tra loro. Dunque sarà

$$l12.l4 : l3.l1.$$

E pareggiando la somma degli estremi con quella de' medî. Sarà

$$l12 + l1 = l4 + l3.$$

Ma $l1 = 0$: cioè non altera la somma. Dunque il solo

$$l12 = l4 + l3. \quad \text{C.B.D.}$$

Similmente si dimostra che

$$l12 = l6 + l2.$$

12. *Avvertimento. 1.°* È necessarissimo che il Professore faccia riscontrare a' giovanetti nelle tavole il logaritmo di 12; e quindi i logaritmi di 4 e di 3: paragoni la somma di questi due ultimi, e faccia a' giovani vedere, come tal somma è uguale al logaritmo di 12.

Diffatti nelle tavole di Marie.....	$l12 =$	1,07918125
Ed è ancora.....	$l3 =$	0,47712125
Dippiù.....	$l4 =$	0,60205999
Sarà la somma di questi due ultimi..	$=$	1,07918124.

Sicchè veda il giovinetto che il logaritmo di 12 non differisce dalla somma de' logaritmi di 3 e 4 se non di un infinitesimo, cioè di 0.00000001.

13. *Avvertimento 2.°* Vogliamo avvertire una volta per sempre che si hanno come nulle le differenze decimali che si potranno osservare nelle ultime cifre di certe espressioni. Così a modo di esempio

$$1{,}07918125 = 1{,}07918124.$$

E la ragione è per sè stesso evidente.

Similmente si potrà far loro vedere come la somma de' logaritmi 2 e 6 pareggiano il logaritmo di 12.

14. *Avvertimento.* 3.° Il vantaggio dunque che ricavasi dai logaritmi sentesi fin da' primi momenti che i giovani incominciano a capirne gli usi. Poichè per esempio, essendo

$$24 = 12.2 = 8.3 = 6.4.$$

Sarà $\quad l24 = l12 + l2 = l8 + l3 = l6 + l4.$

$$\text{Ed essendo pure } 60 = \begin{cases} 2.30 \\ 3.20 \\ 4.15 \\ 10.6 \\ 12.5 \end{cases}$$

$$\text{Sarà pure } l60 = \begin{cases} l2 + l30 \\ l3 + l20 \\ l4 + l15 \\ l10 + l6 \\ l12 + l5. \end{cases}$$

Tutto è buono che il Professore faccia vedere praticamente a' giovanetti sulle tavole di Marie.

In generale: quando un numero è il prodotto di due fattori, il logaritmo del prodotto è uguale alla somma de' logaritmi de' fattori particolari, da' quali si fa derivare il prodotto dato. Sicchè la formola generalissima è

Se $\quad P = F.f.$

Sarà $\quad lP = lF + lf.$

15. *Avvertimento 3.°* Anzi è facilissimo pure comprendere, come per esempio conoscendo il logaritmo di un numero, se la semplice caratteristica aumentasi di 1, di 2, di 3, si otterrà immediatamente il prodotto di quel numero moltiplicato per 10, per 100, per 1000. Così a modo di esempio.

Se si sa che..... $l12 = 1,07918125$
Sarà poi..... $2,07918125 = l120$
E sarà pure..... $3,07918215 = l1200.$

Sicchè se alla caratteristica del logaritmo di 12 aggiungasi

1, 2, 3, ec. il logaritmo che nasce è logaritmo di

12.10, di 12.100, di 12.100 ec. ec.

Il Professore applichi queste dottrine ad altri esempî, presi dalle Tavole da noi citate.

16. *Coroll.* Sicchè se

$$60 = \begin{cases} 2.3.10 \\ 3.4.\ 5 \\ 6.5.\ 2. \end{cases}$$

Sarà $l2 + l3 + l10 = l3 + l4 + l5 = l6 + l5 + l2.$

come è facile praticamente mostrare a giovanetti.

17. *Determinare il logaritmo del quadrato di un numero.* E siccome il quadrato nasce moltiplicando un numero per sè medesimo: quindi facilmente s'intende, che se conoscendo il logaritmo di un numero, e si raddoppii, nasce immediatamente il logaritmo del quadrato dell' istesso numero.

Se per esempio..... $l7 = 0,84509804$
Se log. siffatto si raddoppia, ovv. si molt. per 2
Prod. $= 1,69019608$
Sarà $l(7.7) =$ ..... $1,69019608.$

18. *Determinare il logaritmo del cubo di un numero.* E siccome il cubo nasce moltiplicando il quadrato di un numero per l' istesso numero; anche facilmente comprendesi che se il logaritmo di un numero si moltiplica per 3, sarà un tal prodotto il logaritmo del cubo del numero dato.

Se per esempio..... $l7 = 0,84509804$
Se logaritmo siffatto moltiplicasi per 3
Si avrà il Prod. $= 2,53529412$
Sarà dunque $l(7.7.7)$..... $= 2,53529412.$

19. *Scolio.* In generale dunque se conoscesi il logaritmo di qualunque numero, a misura che si terrà raddoppiato, triplicato, quadruplicato, si otterrà nel prodotto il logaritmo del quadrato, del cubo, del biquadrato ec. del numero dato.

20. Ammesso che $l1 = 0$, in ogni divisione il logaritmo del quoto è uguale alla differenza de' logaritmi del dividendo, e del divisore. Cioè, esprimendo tutte le quantità colle lettere iniziali $lQ = lD - ld.$

Sia per esempio $\frac{60}{5} = 12.$

Sarà in conseguenza $l12 = l60 - l5.$

Dimostrazione.

Ognuno sa, che nella divisione il dividendo sta al divisore, come il Quoto all'unità: sicchè

$$60 : 5 :: 12 : 1.$$

Ma i logaritmi corrispondenti sono tra di loro aritmeticamente proporzionali. Dunque

$$l60 . l5 : l12 . l1.$$

E pareggiando le ragioni aritmetiche. Sarà

$$l60 - l5 = l12 - l1.$$

Ma $l1 = 0.$

Dunque $l60 - l5 = l12.$

Ovvero $l12 = l60 - l5.$ C.B.D.

Esempio pratico.

Difatti riscontrando le tavole di Marie. $l12 = 1,07918125$
Or è pure..... $l60 = 1,77815125$
E tolto poi ..... $l5 = 0,69897000$
Sarà il residuo..... $= 1,07918125.$

Cioè un residuo identico al logaritmico di 12.

Coroll. 1.° Dal teorema antecedente deducesi, che la somma de' logaritmi del quoto e del divisore pareggia il logaritmo del dividendo. Se per esempio

$$\frac{D}{d} = Q. \text{ Sarà } ld + lQ = lD.$$

Esempio pratico.

Difatti..... $l5 = 0,69897000$
Ed è ..... $l12 = 1,07918125$
Sarà la somma..... $= 1,77815125.$

Cioè uguale al logaritmo di 60.

Coroll. 2.° Dunque sempre che si deve dividere uno per un altro numero, basta che, nelle tavole accuratamente eseguite, sieno riscontrati i logaritmi del dividendo, e del divisore: dal primo sottraendo il secondo, nel residuo si avrà il logaritmo del quoto, e in conseguenza è facile riscontrare nelle tavole il numero che gli corrisponde.

Coroll. 3.° E perchè ogni rotto è simbolo di una vera divisione: perciò vedesi chiarissimo, che se dal logaritmo del numeratore si sottragga quello del denominatore, il residuo sarà il logaritmo del quoto. E perciò 1.° il logaritmo di un rotto spurio esser sempre positivo: 2.° al contrario poi, il logaritmo di un rotto vero essere sempre negativo. Gli esempî sono facilissimi, ma è importante che i giovinetti li mettano in pratica sulle tavole logaritmiche.

Coroll. 4.° Dunque se i numeri trovansi in ragion geometrica, i loro logaritmi sono in ragione aritmetica: ed i numeri che sono geometricamente proporzionali hanno i loro logaritmi proporzionali aritmeticamente.

LEZIONE XXVII.

Continuazione su i logaritmi.

1.° Essendoci nella passata Lezione intrattenuti sulle nozioni e sulle principali proprietà de' logaritmi: è ben giusto, che al presente volgiamo la mente alla soluzione de' principali problemi spettanti alla teorica de' logaritmi.

2.° Problema. Dato qualunque numero, determinare coll'uso delle tavole il logaritmo, che gli appartiene.

Soluzione.

Avendo già detto che le tavole contengono i numeri da 1 fino 10000, e che a lato di essi trovansi in corrispondenza i logaritmi: niente è più facile, quanto dall'ispezione del numero dato, trovare in corrispondenza il logaritmo che gli appartiene: purchè però il numero si trovi compreso nella serie de' numeri da 1 fino a 10000. Così per esempio se si vuole il logaritmo di 6317, riscontrando tal numero nelle tavole,

sarà $$\text{l}6317 = 3{,}8005109.$$

E lo stesso dicasi di ogni altro numero che si trova registrato nelle tavole.

3.° Problema. Determinare il logaritmo di un intero che

trovasi nelle tavole, ma che è unito a un rotto; e siffatto numero non sia minore di 1000.

Può darsi però il caso che il numero, del quale vuolsi determinare il logaritmo, si trovi nella serie de' numeri da 1000 fino a 10000; ma porta seco una frazione. Come dunque determinarsi il logaritmo di siffatto numero? Come per esempio trovasi il logaritmo di $4432\frac{3}{7}$.

Soluzione.

Si trovi 1.° nelle tavole il logaritmo dell'intero 4433, prossimamente maggiore del dato: 2.° si trovi il logaritmo di 4432, prossimamente minore del dato: 3.° Dal primo si sottragga il secondo logaritmo, e si noti la differenza. 4.° Quindi in ordine ad 1 (differenza dell'intero dato e del numero prossimamente maggiore), al rotto dato, e alla differenza de' logaritmi del numero dato e del prossimamente maggiore, si trovi il quarto proporzionale. 5.° Questo quarto proporzionale aggiunto al logaritmo dell' intero dato, darà il logaritmo dell' intero unito al rotto che si cercava.

Pratica dell'esempio proposto, cioè del log. di $4432\frac{3}{7}$.

$$14433 = 3{,}6466977$$
$$14432 = 3{,}6465997$$
$$\text{Differenza} \ldots\ldots\ldots = 0{,}0000980.$$

Quindi stabiliscasi

$$1 : \frac{3}{7} :: 0{,}0000980 : x.$$

Sarà $\quad x = (0{,}0000980).\frac{3}{7} = 0{,}0000420.$

Sicchè al ..... $14432 = 3{,}6465997$
Aggiunto il quarto proporzionale..... $= 0{,}0000420$
Sarà la somma..... $= 3{,}6466417.$

Onde $\quad 14432\frac{3}{7} = 3{,}6466417.$

Dimostrazione.

Le differenze de' logaritmi nel caso supposto si possono prendere come proporzionali alle differenze de' numeri, a' quali appartengono. Premesso questo principio, ecco i termini della Proporzione, che instituiscesi.

Differenze de' numeri. $\begin{cases} 1.^\circ \text{ termine } 4433 - 4432 = 1. \\ 2.^\circ \text{ termine } 4432\frac{3}{7} - 4432 = \frac{3}{7}. \end{cases}$

Differenze de' logaritmi. $\begin{cases} 3.^\circ \text{ termine } \log.4433 - \log 4432 = 0{,}0000980. \\ \text{Il } 4.^\circ \text{ termine dunque darà } \log.4432\frac{3}{7} - 1\,4432. \end{cases}$

Or eseguite le debite operazioni, cioè trovato il quarto proporzionale in ordine ad 1; $\frac{3}{7}$; 0,0000980, (che trovasi = 0,0000420) ed aggiunto al logaritmo di 4432, si avrà nella somma il logaritmo cercato. C B.D.

4.° *Avvertimento*. La via però tentata colla soluzione del precedente problema, oltre che è per se stessa lunghissima, non presentasi a primo aspetto chiara a' giovinetti. Perchè forse non abbadano alla proporzione che nasce tra le differenze dei numeri, e quelle de' logaritmi. Perciò a me pare più facil metodo determinare il logaritmo di un numero avente un rotto, e giacente tra i numeri 1000 e 10000 1.° riducendo l'intero e rotto a solo rotto; 2.° trovando il logaritmo del numeratore, e sottraendo quello del denominatore. Nella differenza di questi logaritmi trovarsi il logaritmo del numero cercato, cioè dell' intero unito al rotto.

Sia per esempio da determinarsi il logaritmo di $1025\frac{3}{7}$. Riducendo ad una sola frazione si avrà $\frac{7178}{7}$.

Onde $\log.1025\frac{3}{7} = 1^{\frac{7178}{7}}$.

Ovvero uguale $1^{7178} - 1^{7}$.

Or nelle tavole..... $\log.7178 = 3{,}8560035$

Sottraendo..... $\log.7 = 0{,}8450980$

Sarà il residuo..... $= 3{,}0109055$

4.° Tante volte però suol avvenire che il numeratore del rotto, nel quale si è ridotto l'intero unito al rotto dato, sia un numero che eccede l'ultimo delle tavole consuete, cioè 10000: ma del modo, come determinasi il logaritmo de' numeri che eccedono l'ultimo del canone logaritmico, diremo qui appresso.

5.° Quindi è facile determinare il logaritmo di qualunque rotto spurio. Poichè dal logaritmo del numeratore togliendo il logaritmo del denominatore, si avrà il logaritmo cercato. Sia per esempio da determinarsi log. $\frac{25}{7}$.

$$\begin{aligned} \text{Log} \ldots\ldots\ldots\ldots\ 25 &= 1{,}39794001 \\ \text{Log} \ldots\ldots\ldots\ldots\ 7 &= \underline{0{,}84509804} \\ \text{Res} \ldots\ldots\ldots\ &= 0{,}55284197. \end{aligned}$$

Sicchè $\log. \frac{25}{7} = 0{,}55284197.$

6.° Se poi si volesse il logaritmo di un rotto vero, fa d'uopo 1.° dal logaritmo del denominatore sottrarsi il logaritmo del numeratore: 2.° al residuo dare il segno —. Esso sarà il logaritmo cercato.

Sia da determinarsi il log. di $\frac{7}{25}$. Esso è $= -0{,}55284197$.

7.° E perchè ogni rotto decimale si può considerare come vero rotto: perciò intendesi facilmente, come si può determinare il logaritmo di qualunque rotto decimale.

8.° Problema. Determinare il logaritmo di un numero non reperibile nelle tavole, cioè maggiore di 10000. Per esempio il logaritmo del numero 8754329.

Soluzione.

1.° Il numero dato si converta in un rotto avente per denominatore 1000, 10000, 100000 ec.; in modo che cacciandone l'intero, risulti nel quoto un numero minor di 10000, e una frazione. 2.° Quindi operando, come si è detto n.° 3 di questa Lezione e come verremo qui appresso indicando, alla caratteristica del logaritmo che si otterrà aggiungendo 3, 4 ec. secondo che il denominatore sarà 1000, 10000 ec. si otterrà il logaritmo cercato.

Esempio pratico.

Sia da determinarsi 18754329.

S' immagini $1\frac{8754329}{1000}$.

Ovvero 18754 , 329.

Perciò, secondo quello che abbiamo antecedentemente stabilito.

Log..... 8755 = 3,9422561 pros. magg.
log..... 8754 = 3,9422065 pros. min.
Differenza log.... = 0,0000496
1.ª Differenza num... = 1
2.ª Differenza num.. = 0,329
3.ª Differenza log.... = 0,0000496.

Perciò

Diff. 1.ª		Diff. 2.ª		Diff. 3.ª
1	:	0,329	::	0,0000496 : x.

Onde x = 0,329 × 0,0000496 = 0,00001163.

Sicchè al log..... 8754 = 3,9422065
Aggiunto..... = 0,00001163
Sarà la somma..... = 3,9422228
Aggiungendo alla caratteristica 3 = log. del den. 1000
Si avrà..... = 6,9422228
Sicchè..... log. 8754329 = 6,9422228. C.B.D.

LEZIONE XXVIII.

Continuazione su i logaritmi.

1.° Nell' antecedente Lezione ci siamo intrattenuti determinare i logaritmi di ogni sorta di numeri che fossero dati. Nella presente Lezione volgeremo la mente perchè a' logaritmi dati si determinassero i corrispondenti numeri. Tutt' i problemi dunque si ridurranno al seguente. » Dato un logaritmo, determinare il numero a cui corrisponde il logaritmo dato ». E

siccome questo problema generale presentasi in varie guise: perciò noi lo anderemo minutamente esaminando, spartendolo ne' varî casi, secondo che potrebbe essere proposto e risoluto.

2.° Problema. Trovare il numero che corrisponde a un logaritmo dato, e reperibile nelle Tavole.

Soluzione.

Si riscontri nelle tavole il logaritmo dato, a lato trovasi il corrispondente numero.

Esempio.

Sia da determinarsi il numero che corrisponde al logaritmo

3,1000257.

Il numero che nelle Tavole corrisponde al logaritmo

3,1000257 è 1259. Dunque ec.

Avvertimento. Per questo semplicissimo meccanismo non è d'uopo di dimostrazione. Tutta la ragione è riposta nella costruzione delle tavole, cioè nell'essenza de' numeri, e de' loro rapporti. In tale pratica però giova assaissimo abbadare alla caratteristica del logaritmo dato. Essa determina a un di presso ove debbe giacere il numero che si va cercando.

3.° Problema. Determinare il numero corrispondente a un logaritmo; il quale non si trova esattamente nelle tavole, ed ha per caratteristica 3. Per esempio determinare il numero al logaritmo

3,5700963;

il quale non trovasi registrato nelle tavole, e giace

tra 3,5700757 logaritmo di 3716 } che trovansi nelle
e 3,5701426 logaritmo di 3717 } tavole.

Soluzione.

1.° Si trovi nelle tavole il logaritmo prossimamente maggiore del dato. 2.° Si trovi anche l'altro logaritmo prossimamente minore del dato. 3.° Dal maggiore sottraggasi il logaritmo minore, e si noti la prima differenza. 4.° Dal logaritmo dato si sottragga il logaritmo prossimamente minore, e si noti la seconda differenza. 5.° Si trovi il quarto proporzionale in

ordine alla prima differenza, alla seconda, e all'unità. 6.° Il quarto proporzionale trovato aggiungasi al numero che corrisponde al logaritmo prossimamente inferiore, la somma darà il numero che corrisponde al logaritmo dato.

Esempio.

Sia dunque da determinarsi il numero al logaritmo dato

3,5700963.

Mettendo ordinatamente tutte le quantità, sarà

Numero prossimamente maggiore...	3,5701926 = 13717
Numero prossimamente minore.....	3,5700757 = 13716
1.ª Differenza logaritm.....	0,0001169

Dippiù

Logaritmo dato	3,5708963
Logaritmo prossimamente minore..	3,5700757 = 13716
2.ª Differenza logaritm.	0,0000206

Sicchè istituendo proporzione.

Diff. 1.ª Diff. 2.ª

0,0001169 : 0,0000206 :: 1 : x.

Fatte le debite operazioni, sarà

x = 0,1762.

Sicchè 3716 + 0,1762,

ovvero 3716,1762

è il numero che non si trova nelle tavole, corrispondente al logaritmo dato 3,5700963; il quale ueanche trovasi registrato nelle tavole.

4.° *Avvertimento.* Preghiamo sempre, e supplichiamo che per non defraudare la povera gioventù delle conoscenze necessarissime al progresso delle matematiche, le si propongano problemi simili, perchè le risolvesse praticamente sotto gli occhi del Professore. *Scienza, verità*, e *fatto:* ecco i principali requisiti delle più alte intelligenze umane. Ma ecco un grandissimo requisito per essere accusati di rigidezza, e di pedantismo.

5.° Problema. Determinare il numero di un logaritmo, il quale ha per caratteristica un numero minore di 3, e intanto non si trova registrato nelle tavole. Per esempio determinare il n.° che corrisponde al logaritmo

1,9754367,

il quale non trovasi registrato nelle tavole.

Soluzione.

1.° La caratteristica del logaritmo dato si aumenti di tante unità, di quante richiedesi perchè addivenisse uguale a 3. 2.° Si trovi il numero che corrisponde al logaritmo, la cui caratteristica trovasi pareggiata a 3; secondo che dicevano nell' antecedente problema. 3.° Il numero trovato si divida per un denominatore avente 1 unito a tanti zeri quante sono le unità aggiunte, perchè la caratteristica fosse addivenuta pari a 3. Il quoziente di tale divisione determinerà il numero appartenente al logaritmo primamente dato, e che neanche è reperibile nelle tavole.

Esempio.

Si debbe determinare il numero che corrisponderebbe al log..... 1,9754367
Aumentando la caratteristica di.... 2
Tratterebbesi determinare il numero del logaritmo..... 3,9754367

Ed operando come nel problema antecedente.

Log. prossimam. magg. del dato cioè 3,9754778 = l9451
Log. prossimam. min. del dato, cioè 3,9754318 = l9450
Sottraendo, sarà differenza 1.ª = 0,0000460

Log. aumentato nella caratteristica, cioè..... 3,9754367
Log. prossimam. min., cioè..... 3,9754318
Sottraendo, sarà differenza 2.ª = 0,0000049

Istituendosi proporzione come nell' antecedente problema,

	diff. 1.ª		diff. 2.ª		
Sarà	0,0000460	:	0,0000049	:: 1 :	x.

Sicchè fatte le debite operazioni; cioè dividendo il secondo pel primo termine, perchè nella multiplicazione il 2.° × 3.° termine 1 dà per prodotto l' istesso termine secondo, sarà

$$x = 0,1065.$$

ovvero $$9450 + 0,1065,$$

ovvero $$9450,1065$$

sarebbe il numero corrispondente al logaritmo supposto

$$3,9754367.$$

Sicchè il n.° 9450,1065 dividendosi per 100, cioè per un denominatore avente 1, seguito da due zeri, quante sono le unità aggiunte alla caratteristica primamente data, darebbe per quoto 94,501065.

Sicchè il numero corrispondente al logaritmo

$$1,9754367$$

sarebbe 94,501065. C.B.F.

6.° Problema. Determinare il numero corrispondente a un logaritmo non reperibile nelle tavole, e la cui caratteristica sia un numero eccedente 3. Per esempio determinare il numero corrispondente al logaritmo 9,4700036; la cui caratteristica 9, come vedesi, è maggior di 3.

Soluzione.

La soluzione del già proposto problema ha moltissima somiglianza con quella del problema antecedente. Se non che bisogna 1.° che la caratteristica diminuiscasi di tante unità, di quante richiedesi perchè addiveuga uguale a 3. Si trovi il numero corrispondente al logaritmo diminuito, cioè avente per caratteristica 3, secondo che si è antecedentemente insegnato. 3.° Un tal numero si moltiplichi per un fattore che abbia 1 seguito da tanti zeri, quante sono le unità tolte dalla caratteristica per ridurla a 3. 4.° Un tal prodotto sarà il numero corrispondente al logaritmo dato.

Esempio.

Sia da determinare il numero che corrisponde al logaritmo

9,4700036.

Logaritmo dato..... ...	9,4700036
Logaritmo diminuito di 6.....	3,4700036
Log. prossim. magg. a quest'ultimo.	3,4701163 = l2952
Log. prossimam. min. allo stesso...	3,4699692 = l2951
Sottraendo, sarà diff. 1.ª	0,0001471
Inoltre log. ridotto.....	3,4700036
Log. prossimam. min	3,4699692 = l2951
Sottraendo, sarà diff. 2.ª	0,0000344

Perciò istituendo proporzione

diff. 1.ª diff. 2.ª

log. 0,0001471 : 0,0000344 :: 1 : x.

Sicchè eseguite le debite operazioni; cioè per via di decimali dividendosi 344 per 1471.

Sarà x = 0,2338535
Il quale agg. a 2951..... num. del log. prossimam. min.
Dà a somma 2951,2338535
Il quale mult. per 1000000 num. corrispond. alla caratt. 6 dimin.
Dà per prodotto 2951233853 5

Sicchè al log. 9,4700036 corrisponderebbe il numero

2951233853,5000000.

7.° *Avvertimento.* Sebbene avessimo detto qualche parola su i logaritmi de' *rotti veri*, che nel sistema delle progressioni già statuite, riescono sempre negativi: pure non ci siamo innoltrati sopra tutte le quistioni, che potrebbero appartenere ai logoritmi negativi. Raynaud fece un capitoletto a parte.

E niuno ignora le controversie sopra un tal punto insorte tra Leibnitz e Bernoulli, tra Eulero e chi sia quello che nel Dizionario Matematico avesse steso l'articolo *Logaritmo*. È a vedersi sopra di ciò il Dizionario Matematico di Bossut e Lalande art. log. in fine.

Soltanto avvertiamo che nella ipotesi che $l_1 = 0$; i logoritmi de' rotti veri debbono essere affetti del segno —. E che mutando progressione aritmetica potrebbero essere affetti del segno +. Quindi su di tal proposito, così sta scritto nel Dizionario di sopra citato. « Dicesi, per esempio, che il *logoritmo* dell'unità è $= 0$, e che i logaritmi delle frazioni sono negativi. Tutto ciò non è, che una supposizione; perchè potrebbesi prendere una tale progressione aritmetica, che il logaritmo dell'unità non fosse uguale a 0, e che i logaritmi delle frazioni fossero quantità reali, e positive. Abbiamo molta ragione di tenere, che tutta questa disputa sui logaritmi ordinarî non sia che una disputa di parole, e non sia stata sì dibattuta, che per mancanza di aversi ben inteso. Questo non sarebbe già il primo esempio di una disputa di parole in Geometria ».

LEZIONE XXIX.

Continuazione su i logaritmi.

1.° *Applicazione del calcolo de' logaritmi.* Esposta la teorica de' logaritmi, è tempo di vederne i vantaggi, che traggonsi da tali dottrine. E sebbene essi sieno innumerevoli: pur nondimeno io verrò mano mano additandovi i più essenziali; e soprattutto, quelli che sono adattati alle conoscenze che attualmente vi avete delle scienze Matematiche. Indipendentemente dunque dall'uso che si fa de' Logaritmi nella Trigonometria, e in tutte quasi le *Matematiche applicate;* io vi farò vedere, come de' logaritmi potete valervene anche nelle soluzioni de' problemi da voi per altre vie già risoluti. Anzi dippiù. Ove è paruto che per mancanza di convenienti forze non abbiate avuto un favorevole ascendente sopra taluni problemi: è ormai tempo che confortata la vostra intelligenza con quest' ultima teorica ritorniate sopra que' problemi, e li rendiate oggetto del vostro esame, se fino adesso parevate voi insufficienti alle loro soluzioni. Se, per esempio, fino adesso non vi siete provati al di là della potenza e della radice terza: adesso avete mente, che levate ogni numero a qualunque potenza, e togliete da ogni numero qualunque radice.

2.° *Avvertimento.* In tutte quasi le soluzioni de' problemi antecedenti ha avuto luogo il teorema: che « le differenze dei numeri sono proporzionali alle differenze de' logaritmi ». Senza di questo, che a ragione può esser tenuto in conto di teorema fondamentale, sarebbe stato impossibile trovare, e render ragione di tanti numeri corrispondenti a dati logaritmi, e *vice-*

versa. Or sappiate, che nella soluzione de' problemi che proporremo nella presente Lezione, primeggeranno due altri teoremi, i quali saranno sufficienti a dar ragione delle conseguenze che ci proporremo: 1.° che sommando nella progressione aritmetica, moltiplicasi nella corrispondente progressione geometrica: 2.° E che sottraendo nella progressione aritmetica, dividesi uno per l'altro termine della corrispondente progressione geometrica. Ciò premesso, passiamo alla soluzione di varî problemi.

3.° Problema. Moltiplicare due numeri facendo uso de' logaritmi.

Soluzione.

Essendo dati i numeri che si debbono moltiplicare tra loro: 1.° Si determinino i logaritmi de' numeri dati: 2.° Siffatti logaritmi si sommino. 3.° Si determini il numero corrispondente a tale somma. 4. Il numero trovato sarà il prodotto che si andava cercando.

Esempio.

Sia da moltiplicarsi..... 432
per..... 23

log. 432 = ... 2,63548375
log. 27 = ... 1,36172784
la somma è.. = 3,99721159

Si trovi il numero corrispondente a siffatto logaritmo, e

Sarà = 9936. C.B.F.

4.° *Corollario*. Dunque tutte quelle quistioni già risolute per la moltiplicazione si possono tutte quante eseguire per mezzo del calcolo de' logaritmi. Ed è perciò che anche coll'uso de' logaritmi si possono moltiplicare un intero unito per un rotto, e un intero e rotto per altro intero a rotto.

5.° Problema. Dividere uno per un altro numero per mezzo de' logaritmi.

Soluzione.

1.° Si trovino i logaritmi del dividendo, e del divisore, e si sottragga questo da quello, notandone il residuo. 2.° Riguardo al logaritmo *residuo* si trovi il numero che corrisponde. Sarà questo numero il quoto che si cercava.

Esempio.

Sia da dividersi 180 per 12.

$$\begin{array}{l} \text{Log. } 180 = 2.2552725 \\ \text{Log. } 12 = 1.0791812 \\ \hline \text{Resid.....} \ 1.1760913 \end{array}$$

Or il logaritmo 1.1760913

corrisponde al n.° 15. Dunque

$$\frac{180}{12} = 15.$$

6.° *Avvertimento.* Quindi si faccia a' giovani vedere come coll' uso de' logaritmi si dividerebbe un intero per un rotto, un rotto per un altro, un intero e rotto per altro intero e rotto ec. ec.

7.° Problema. Dato un numero innalzarlo a qualunque potenza.

Soluzione.

1.° Si trovi il logaritmo del numero dato. 2.° Siffatto logaritmo si multiplichi per l' esponente della potenza che si cerca. 3.° Si trovi il numero corrispondente al prodotto avuto. Sarà sì fatto numero la potenza cercata.

Esempio.

Sia coll' uso de' logaritmi da innalzarsi 17 alla terza potenza.

$$\text{Log. } 17 = 1.2304489.$$

Or $\overset{\text{log.}}{1.2304489} \times \overset{\text{pot.}}{3} = 3.6913467.$

E il logaritmo 3.6913467

è corrispondente al numero 4913.

Sicchè $(17)^3 = 4913.$

Similmente si può trovare la quarta, la quinta, la vigesima potenza di un numero ec. Tutto si può realizzare con esempî.

8.° *Avvertimento.* Similmente s' innalza a qualunque potenza un rotto, un intero unito a rotto.

Corollario. Anzi l'uso de' logaritmi vi fornisce de' mezzi di elevare i numeri a quelle potenze, che sarebbe difficilissimo con metodi diversi da quello de' medesimi logaritmi.

9.° Problema. Dato un numero estrarre da esso qualunque radice.

Soluzione.

1.° Si trovi il logaritmo del numero dato. 2.° Il logaritmo trovato si divida per l'esponente della radice. 3.° Si trovi il numero corrispondente al logaritmo quoto. Sarà siffatto numero la radice cercata.

Esempio.

Sia da estrarsi la radice seconda da 144.

L. 144 = 2,1583625.

Or 2.1583625

diviso per 2 è = 1,0791812.

Ed al logaritmo 1.0791812 corrisponde al n.° 12. Dunque

$\sqrt{144} = 12.$

Similmente si può da ogni numero estrarre la radice terza, quarta, ec. da un intero, da un intero unito a rotto.

Anzi co' logaritmi si rendono facili quelle estrazioni, che con altri metodi pareva in tutt' i conti difficile. Ed ecco perchè noi non abbiamo parlato nè delle potenze, nè delle radici superiori alla terza: perchè quanto più arduo rendevasi trattarle co' metodi prescritti in altro trattato, per altrettanto è facile e piano trattarle coll' uso de' logaritmi, come abbiamo poco fa osservato.

LEZIONE XXX.

Continuazione su i Logaritmi.

1.° Rimane qualche altra cosa da investigare coll'uso de' logaritmi: che sebbene altrove proposta, e assodata; pure è da noi qui di nuovo proposta, e trattata, per mostrare quanto amplo e vantaggioso uso si potesse fare de' logaritmi. Sia intanto.

2.° Dati tre numeri della proporzione geometrica coll' uso de' logaritmi trovare il quarto proporzionale.

Soluzione.

1.° Troviusi i logaritmi di tutti e tre i numeri dati. 2.° Dalla somma de' logaritmi del secondo e terzo si sottragga il loga-

ritmo del primo numero, e si noti il residuo. 3.° Si veda il numero corrispondente al logaritmo residuo. Sarà siffatto numero il quarto proporzionale cercato.

Esempio.

Sia da trovarsi il quarto proporzionale in ordine 13, 26, 4.

E sia 13 : 26 :: 4 : X.

Trovandosi i logaritmi sarà

Log. 13 = 1.1139433
Log. 26 = 1.4149733
Log. 4 = 0.6020600

Or sommando log. 26 = 1.4149732
log. 4 = 0.6020600
Sarà la somma..... = 2.0170332
Dalla quale sottratto log. 13 = 1.1139432
Sarà il residuo..... = 0 9030900

Or al logaritmo 0.9030900 corrisponde il numero 8. Sicchè

13 : 26 :: 4 : 8.

3.° Se la Proporzione invece di essere discreta fosse continua, e si trattasse trovare coll'aiuto de' logaritmi il terzo termine continuamente proporzionale: in tal caso 1.° dal doppio del logaritmo del secondo de' numeri dati si sottrarrà il logaritmo del primo termine, e si noterà il residuo. 2.° Si vedrà qual numero corrisponde a questo residuo. Ed esso sarà il terzo numero continuamente proporzionale.

Esempio.

Sia da trovarsi il terzo continuamente proporzionale in ordine ai numeri 16 e 48.

Log. 16 = 1.2041200
Log. 48 = 1.6812412

Or 1.6812412 × 2 = 3.3624824
Sottratto log. 16 = 1.2041200
Sarà il residuo.. = 2.1583624

Or al logaritmo 2.1583624 corrisponde 144. Sicchè

∺ 16 : 48 : 144.

4.° Dati due numeri, coll'aiuto de'logaritmi trovare il medio proporzionale.

Soluzione.

1.° Si trovino i logaritmi dei numeri dati, e si sommino insieme. 2.° Si prenda la metà di tal somma. 3.° Si veda il numero corrispondente alla metà della somma de' logaritmi. Sarà siffatto numero il medio geometricamente proporzionale.

Esempio.

Sia da trovarsi il medio proporzionale tra i numeri 4, e 16.

Log. 4 = 0.6020600
Log. 16 = 1.2041200
Sarà la somma..... 1.8061800

Ma la metà di

1.8061800 = 0,9030900.

E al logaritmo 0,9030900 corrisponde il numero 8. Onde

∺ 4 : 8 : 16.

Avvertimento 1.° Io mi era proposto in queste lezioni far vedere i principali usi a'quali servono i logaritmi, i principali vantaggi che da essi possono ricavarsi. Credo aver adempito al fine, ed al dovere. I vantaggi poi, che da'logaritmi ricavansi nelle altre scienze sono infiniti. Oltre che indispensabilmente ha bisogno di essi la Trigonometria, partecipano pure de' loro vantaggi infinite altre scienze; le quali mentre sembrano superiori alla Trigonometria e all'Aritmetica, da queste scienze però prendono tutto ciò che serve alle loro dimostrazioni. E di fatti come i logaritmi portino la loro luce nelle altre scienze fanno eterna testimonianza e le opere di Lalande, e la Gnomonica di Don Bedos; e le opere di Navigazione di Bouguer: nella Geografia, nell' agrimensura, ed in tutte le scienze Fisico-Matematiche le opere di Deluc, e di infiniti altri genî.

Avvertimento 2.° Io qui avrei dovuto immediatamente aggiungere i problemi che si risolvono coll' uso de' logaritmi. Ma siccome in essi hanno luogo altri problemi, come sarebbero della semplice diretta ec. perciò per non violare il metodo, prima tratterò de' problemi di siffatte soluzioni, e poi passerò a quelli, che si risolvono facilmente coll' uso de' logaritmi, se mi sembrerà opportuno.

LEZIONE XXXI.

Osservazioni necessarie per la Soluzione de' Problemi.

1.° Risolvere un problema, significa applicare le dottrine teoretiche dell'Aritmetica alle quistioni pratiche, e di fatto. Delle dottrine Trigonometriche servesi l'Astronomo per conoscere le distanze, le altezze, le inflessioni: ma dell'Aritmetica poi si vale per dare *realità* alle linee, alle perpendicolari, agli angoli. Dell'Aritmetica servonsi tante volte i Finanzieri nel dare accurate Statistiche; i Negozianti nel mettere in commercio i loro capitali; gli Architetti nel determinare ogni sorta di capacità, nel livellare, nel costruire. Le quistioni aritmetiche dunque in questo senso diconsi quistioni di fatto; perchè sebbene tante volte non si può adempiere a' risultamenti finali; nondimeno niente è tolto alla loro esattezza. Così per es. quando dicesi che se una formica ha forza a superare la resistenza di un acino di grano; possono essere determinate le formiche che si richiederebbero per trasportare il toro Farnese: sebbene non avverrà mai che ciò seguisse; pure tutto questo avverrebbe se si componessero in una quelle forze che trovansi divise. Così anche dell'ammettere che un cavallo p. e. alza un peso di $40\frac{1}{2}$ chilogrammi ad un metro di altezza in un minuto secondo, si è detto che determinavasi la forza de' vapori proporzionandola a quella del cavallo. E in questo senso medesimo volgevasi al Cielo Archimede sul punto che aveva inventato la Leva, e dicevagli: « dammi un punto ove sospendere la Leva, che tutti muoverò da' cardini loro il Cielo e la terra ». Così Torricelli trovava il peso dell'atmosfera; e mille altri illustri matematici determinavano, a via di calcoli certi risultamenti che niuno ha mai messo, o ardirà mettere in dubbio. Sebbene dunque diconsi propriamente quistioni di fatto tutte quelle che possono essere oggetto de' sensi e dell'esperienza: anche quistioni di fatto in Aritmetica dicousi tutte quelle che nascono dalla dottrina de' numeri, quantunque tante volte non restino nè co' sensi nè coll'esperienza realizzate.

2.° Abbiamo detto altrove, che i numeri sono relazioni, e pertanto sembrano realità, per quanto che sono reali le cose che numeransi. Newton disse una gran verità, quando definì il numero *un rapporto*. Nello sciogliere dunque i problemi numerici, e nel determinare i risultamenti della quantità, debbono essere note certe relazioni, in conformità delle quali procedere e terminare un'operazione data. I rapporti dunque quando

si mutano, si mutano pure i risultamenti che ne sono conseguenza. Se cercate convertire il ducato napolitano in scellino, in franco, in piastra turca: a misura che cambierete il rapporto, cambierà il valore. Sicchè è necessario, che sappiansi siffatti rapporti. Ecco perchè noi abbiamo trovato opportuno aggiungere a beneficio della gioventù le seguenti tavole: perchè ella riuscisse valente nella soluzione di tutt'i problemi appartenenti alla quantità discreta.

TAVOLA PRIMA.

Gravità specifica de' corpi (1) *in rapporto all'acqua distillata* (2).

Platino purificato...	21,8000	Pietra di Arcueil.	2,0605
Oro puro.....	19,2572	Pietra di S.Cloud.	2,2011
Mercurio.....	13,5681	Acqua di mare...	1,0263
Piombo.....	11,3523	Acqua distillata..	1,0000
Argento.....	10,4743	Vino di Borgogna.	0,9915
Rame giallo.....	8,3958	Olio di Olive....	0,9153
Rame rosso.....	7,7880	Legno di quercia..	0,1700
Acciaro.....	7,8331	Legno di zappino.	0,5500
Ferro forgiato.....	7,7880	Etere vitriolico..	0,7396
Stagno.....	7,2914	Aria comune....	0,00123233
Ferro fuso.....	7,2070	Ossigeno, od aria pura.....	0,00133929
Porfido.....	2,7651	Idrogeno, od aria infiammabile..	0,00009911
Granito di Egitto...	2,7606		
Marmo di Carrara...	2,7168		
Pietra di San Leu...	1,5781		

(1) La seguente Tavoletta è ricavata da' risultamenti ottenuti per calcoli eseguiti dal signor Brisson 1787.

(2) Abbiamo detto altrove del peso di un piede cubico di acqua distillata, rapportandola alla legge del dì 6 aprile 1840. Secondo Brisson il piede cubico di acqua distillata a 10° del termometro pesa

libbre	once	grosso	grani
69,	14,	1,	54.

Bisogna che questi rapporti non passino inosservati; perchè servono alla soluzione de' Problemi appartenenti alle scienze naturali.

TAVOLA II.

Rapporti delle antiche alle misure nuove secondo la legge del dì 6 aprile 1840.

Peso.

1.° Il rotolo sta alla libbra nel rapporto di

$$25 : 9.$$

Imperocchè il rotolo è $33\frac{1}{3}$ once, e la libbra è 12 once.

Sicchè rotolo sta a libbra come

$$\frac{100}{3} \text{ sta a } \frac{36}{3}.$$

Ovvero come sta 100 a 36; ovvero come 25 : 9.

Sicchè per ridurre i rotoli a libbre, *si debbono moltiplicare i rotoli dati pel termine 25 della ragione trovata, e il prodotto dividere per l'altro termine della ragione, cioè per 9.*

E in siffatte riduzioni ha propriamente luogo la ragione inversa. Perchè i rotoli dati daranno tanto più di libbre, per quanto nella suindicata ragione il *rapporto* del termine 9 al termine 25 è minore di quello di 25 : 9.

Così a modo di esempio, se vuolsi sapere: *7 rotoli quante libbre daranno:* fa d'uopo istituire le seguenti ragioni

$$25 : 9 \;\text{»}\; 7 : x.$$

E quindi invertita la prima ragione, istituire la seguente

proporzione $\quad 9 : 25 :: 7 : x.$

Sicchè $\quad x = \frac{7.25}{9} = \frac{175}{9} = 19\frac{4}{9}$ libbre.

Rimanendo frazioni si multiplichino successivamente per 12, per 3, per 10, per 20 onde anche successivamente avere le once, le dramme, i trappesi, gli acini: secondo che dicevamo nel Trattato delle Frazioni.

2.° Per ridurre poi le libbre a rotoli, e frazioni: *si mettano dopo le libbre date tre zeri, un tal numero si multiplichi per 9, e il prodotto si divida per 25: separandone dal quoto tre zeri a destra si otterranno le cifre de' rotoli e delle loro parti decimali.*

Se per esempio si desidera sapere 14 libbre quanti rotoli daranno, si farebbe

$$\frac{14{,}000 \times 9}{25} = \frac{126{,}000}{25} = 5{,}040 \text{ di rotolo.}$$

Misura di capacita' per gli aridi.

3.° Il tomolo *antico* è identico al *legale*: quindi non vi è nessuna differenza, per determinarla con un rapporto.

Misura di capacita' per taluni liquidi, come vino, aceto ec.

4.° I carri, le botti, i barili *antichi* sono identici a' *legali*. In antico però il barile legale era diverso del barile del cantiniere. Il primo era di 60 caraffe di once 24, e 0,143: il secondo poi era di 60 caraffe di once 24, e $\frac{2}{3}$ circa. La legge ha conservato il solo barile legale.

Avvertimento. Se mai i giovanetti non si fossero persuasi di ciò che sulla capacità della botte, e del barile, e sul loro rapporto dicevamo a pag. 51 e 52, è buono che il Professore quì ripigli le osservazioni colà notate.

Misure per olio.

5.° Le misure per olio, cioè lo *staio*, il *quartuccio*, il *quarto*, il *misurello*, sono abolite: perchè la legge vuole che l'olio si *pesi*. Però nella vendita a minuto la legge permette le misure cilindriche corrispondenti alle seguenti

$$\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{5}{100} \text{ del rotolo.}$$

In guisa che per Napoli

$\frac{5}{10}$ di rot. = 4 misurelle antiche, e $\frac{2}{3}$

$\frac{3}{10}$ di rot. = 2 misurelle antiche, e $\frac{4}{5}$

$\frac{2}{10}$ di rot. = un misurello antico, e $\frac{6}{7}$

$\frac{1}{10}$ di rot. = $\frac{9}{10}$ di misurello antico

$\frac{5}{100}$ di rot. = $\frac{5}{11}$ di misurello antico.

MISURA DI LUNGHEZZA.

6.° La canna antica sta alla canna legale come

8 : 10, ovvero come 4 : 5.

MISURA DI SUPERFICIE.

7.° Il *moggio antico* sta al moggio legale come

1 : 4,84.

8.° *Avvertimento*. Se taluno desiderasse tavole più estese, e applicate a tutt' i Comuni della Provincia di Napoli, potrà provvedersi delle Tavole già fatte per incarico dato dalle Autorità Superiori a parecchi de' nostri più distinti Matematici, non escluso il chiarissimo D. Ferdinando de Luca.

TAVOLA III.

Monete di diversi Paesi rapportate alla moneta Francese (1).

NAPOLI.

Nomi delle monete.	valore in franchi, e decimali di franco. f.	c.
Oncia di oro dopo il 1818 di duc. 3.....	12,	99,
Doppia nuova di duc. 15.....	64,	95,
Doppia di duc. 30.....	129,	90,
Piastra.....	5,	10,
Ducato di carlini 10.....	4,	25,
Carlino.....	0,	425,

SICILIA.

Oncia d'oro dopo il 1748.....	13,	73
Scudo di 6 tarì.....	5,	10

INGHILTERRA.

Ghinea di oro di 21 scellini.....	26,	47
Scellino antico.....	1,	23,60
Scellino dopo il 1818.....	1,	16,14

AUSTRIA E BOEMIA.

Ducato di oro dell' Imperatore.....	11,	86
Sovrana di oro.....	17,	58
Fiorino di argento.....	2,	59,75
Un pezzo di 10 carantani.....	0,	43,25

---

(1) Ci è paruto conveniente riferire le monete de' diversi paesi alla moneta della Nazione Francese; perchè nel commercio l' uso della moneta di questa nazione è più frequente. Tutto dunque riferiscesi a *franchi* e *decimali di franco*: dando al franco l' ordinario prezzo di grana 23 de' nostri.

Inoltre ben lungi di riferire tutte e singole monete delle diverse nazioni, qui soltanto, sulle tracce del signor Raynaud, riferiremo le principali, cioè quelle che sono più comuni e più usate nel commercio.

Olanda.

	f. c.
Ducato di oro	11, 93
Pezzo d'oro di 10 fiorini del 1808	21, 57
Pezzo di oro di Re Guglielmo, 1818	20, 77
Fiorino di argento	2, 15,94
Ducato di argento, o *risdallero*	5, 48

Danimarca e Holstein.

Ducato di oro dopo il 1767	9, 47
Ducato di oro dopo dal 1791 a 1802	11, 86
Risdallero di argento dopo il 1776	5, 66
Risdallero corrente	4, 96
Marco danese di 16 scellini del 1776	0, 94
Marco di Lubeck di 16 scellini del 1740	1, 53

Stato Pontificio.

Doppia di oro de'sommi Pontefici Pio VI, e Pio VII.	17, 27,50
Scudo di argento di 10 paoli, ovvero di 100 baiocchi	05, 38,50
Papetto di 20 baiocchi	01, 08
Un Paolo, moneta di 10 baiocchi	00, 54

Spagna.

Dublone di oro dal 1772 al 1786	83, 93,
..... dopo il 1786	81, 51,
Piastra di argento dopo il 1772	5, 43,
Reale, o la quinta parte della piastra	1, 08,

Portogallo.

Moneta di oro di 4800 reis	33, 96,
Pezzo di 16 testoni di 1600 reis	11, 31,75
Cruzado di argento di 480 reis	2, 94,
Cruzado nuovo di 1000 reis	6, 12,50

Amburgo.

Ducato di oro *ad legem imperii*	11, 86,
Ducato di oro nuovo	11, 76,
Marco banco	1, 88,
Risdallero	5, 78,

Toscana.

	f. c.
Ruspone di oro	36, 04,
Francescone di argento di 10 paoli	5, 61,
Paolo	0, 56,10
Lira	1,

Parma.

Zecchino di oro	11, 95,
Doppia di 40 lire di Maria Luisa dopo il 1815	40, 00,
Ducato di argento dal 1784 al 1796	5, 18,
Lira	1, 00,

Venezia.

Zecchino di oro	12, 00,
Ducato di oro	7, 49,
Doppia di oro	21, 36,
Ducato effettivo d' otto lire di argento	4, 18,
Ducatone	5, 91,
Tallero	5, 32,

Prussia.

Ducato di oro	11, 77,
Federico, moneta di oro	20, 80,
Risdallero di argento	3, 71,63
Grosso	0, 15,48

Ragusa.

Tallero di argento	3, 90,
Ducato di argento	1, 37,
Grossetti 6	0, 20,50

Russia.

Ducato di oro dal 1755 al 1763	11, 79,
..... del 1763	11, 59,
Imperiale di oro di 10 rubli dal 1755 al 1763	52, 38,
Imperiale di 10 rubli dopo il 1763	41, 29,
Rublo di argento di 100 copecks dal 1750 al 1762	4, 61,
..... dopo il 1763 al 1807	4, 00,

Sardegna.

Carlino di oro dopo il 1768	49, 33,
Doppia di oro	28, 45,

	f.	c.
Pezzo di argento dopo il 1768	4,	70,
Pezzo nuovo di 5 lire del 1816	5,	00,

SAVOIA E PIEMONTE.

Zecchino d' oro.....	11,	94,50
Doppia d' oro nuova di 24 lire.....	30,	00,
Carlino d' oro dopo il 1765.....	150,	00,
Doppia d' oro nuova di 20 lire del 1816.... ..	20,	00,
Moneta di argento di 6 lire dopo il 1755.. ...	7,	07,
Moneta nuova di argento di 5 lire del 1816...	5,	00,
Lira.....	1,	00,

GENOVA.

Zecchino di oro.....	12,	01
Lira nuova.....	1,	00,

SASSONIA.

Ducato d' oro.....	11,	86,
Doppia Augusta di 10 talleri.....	41,	49,
Risdallero d' argento, moneta di convenzione dopo il 1763.....	5,	19,50
Fiorino di convenzione.....	2,	59,75
Un grosso.....	0,	16,21

SVIZZERA (1).

Moneta d' oro di 32 franken di Svizzera.... ..	47,	63,
Ducato d' oro di Zurigo.....	11,	77,
Ducato d' oro di Berna.....	11,	64,
Doppia di Berna.....	23,	76,
Pezzo di 2 fiorini di argento.....	4,	56,

STATI UNITI IN AMERICA.

Doppia di oro di 10 dollari.....	55,	21,
Dollaro di argento.....	5,	42,

TURCHIA.

Zecchino d' oro d' Abdoul-Hamid, 1774.....	8,	72,
Zecchino d' oro di Selim III.....	7,	30,
Parà d'argento, 1773.....	0,	04,
Piastra di 40 parà, 1780.....	2,	00,
Moneta di 5 piastre di Mahmoud nel 1811.....	4,	13,67

(1) Le monete di argento nella confederazione sono diversissime. Noi le omettiamo, perchè porterebbero molta confusione a giovanetti.

Avvertimento. Le monete del Giappone, e del Mogol si conoscono per approssimazione, in quanto che si è solamente calcolato il valore intrinseco dell' oro e dell' argento: ma non si sa il vero prezzo legale, e di commercio. Quindi anche noi le omettiamo. Il signor Raynaud ha dato un piccolissimo cenno di tali monete nella sua Aritmetica.

LEZIONE XXXII.

Soluzione de' Problemi, e primieramente di quelli che diconsi di ragione Semplice-Diretta.

1.° La Regola detta comunemente del *Tre* prende siffatta denominazione; perchè essendo date tre quantità, facilmente si fa da esse derivare la quarta geometricamente proporzionale. Sovente i nomi corrispondono alle cose. Essa è anche, non solo da anime vulgari, ma da menti dottissime, detta altrimenti *Regola d' oro:* nome metaforico. Perchè non tante dovizie ha apportato all' umana società questo metallo che costerna i cuori, e giunge a placare non lievi sdegni, quante ne ha recato al Commercio, e alle umane discipline la Regola alla quale volgiamo da ultimo l' attenzione. E sebbene ella prende diverse denominazioni; in quanto che le ragioni di tal quistione proposta or sono una diretta dell' altra; or una è inversa, o reciproca dell' altra; or sono date cinque quantità, e fa d' uopo che sieno composte in tre; or applicata a false posizioni di numeri mena ad esatti risultamenti finali: or applicasi al Commercio, e alle particolari società; alle alligazioni; alle misture: in tutte però essa entra; perchè in tutte indistintamente trattasi trovare la quarta in ordine a tre grandezze già date.

2.° I numeri, torniamolo a dire, sono relazioni. Sicchè è manifesto che nel risolvere tutte le quistioni di fatto, debbono essere noti questi tali rapporti. Se per esempio non sapete il rapporto del *franco*, moneta francese, alla nostra *piastra;* come potrete convertire per esempio un numero di franchi qualunque in piastre napolitane, e viceversa? Ed ora capite, perchè noi prima di risolvere i problemi abbiamo premesse tavole generali, che contengono siffatti rapporti.

3.° Dippiù: non può mai un giovanetto cacciar le mani ne' problemi, e nelle quistioni di fatto; se prima non se ne formi distinta analisi della quistione, o del problema che gli si propone risolvere. Ricordiamoci sovente di un sensatissimo detto, cioè « l'analisi essere l' organo della sapienza ». E prima d' ogni altra cosa il problema debbe essere studiato, per essere chiara-

mente analizzato: onde distinguere poi e spartire i rapporti delle quantità; separare le ignote dalle grandezze note, in una parola, comprendere ciò ch'è *dato*, e ciò ch'è *quesito*. Quindi vedere, e quale situazione debbe darsi alle grandezze; e di quali dottrine propriamente usare per giungere al finale risultamento. Senza questa chiarezza, senza questa precisione, non solo che i giovani non giungeranno a risolvere problemi da loro medesimi; ma quando anche vedessero per maestra mano risolute quelle quistioni, non si persuaderebbero giammai come que' metodi risultano da dottrine, che sono a poveri ed incauti giovanetti *scappate*. Ma gl'incauti giovani si trovano tra il pianto de' Padri e le beffe de' numeri!!! *Satis lusimus, seria quaeramus*.

4.° Incominciamo a render con esempî facilissima e piana l'intelligenza e l'applicazione delle dottrine aritmetiche nella soluzione de' problemi. E propriamente di quelli che risolvonsi con una ragione *semplice*, e *diretta* di un'altra data. Se per esempio, vi si dicesse: di quante ore componesi una settimana? Bisognerebbe prima d'ogni altro riflettere che *settimana* significa 7 giorni, e che ogni giorno componesi di 24 ora. Mi si permetta quest'esempio. La quistione dunque riducesi a sapere: che se 1 giorno componesi di 24 ora, di quante ore si comporrebbero 7 giorni? Sicchè spartendo (mi sia anche permesso dirlo) le quantità omogenee dall'eterogenee, secondo che richiede la natura della ragione geometrica, cioè le ore da' giorni si formeranno due ragioni di 1 giorno e 7 giorni; e di 24 ore, e delle ore cercate, che chiameremo x. Sicchè il problema potrà essere intavolato del seguente modo:

$$\overset{\text{giorni}}{1 : 7} :: \overset{\text{ore}}{24 : x}.$$

E secondo che dicevamo nel determinare il quarto geometricamente proporzionale; sarà

$$x = 168.$$

Nella qual proporzione perchè come aumenta il conseguente 7 relativamente all'antecedente 1; così del pari il conseguente 168 aumenta relativamente all'antecedente 24: perciò è detto problema di ragion *semplice*, e di ragion *diretta*. La *difficilissima* quistione proposta dunque si è ridotta all'altra da noi già risoluta, cioè « dati tre termini geometricamente proporzionali, determinare il quarto ».

5.° Tutti que' problemi dunque, ove sono date tre quantità, e cercasi determinare una quarta, che aumenta o diminuisce

relativamente alla terza, come la seconda aumenta o diminuisce relativamente alla prima, appartengono a questa classe, e risolvonsi tutti di un istessissimo modo.

Tutto sta dunque che sappiate distinguere, se il problema che vi è dato appartiene a questa classe; e siete nel caso di situare convenevolmente le grandezze date (1).

Perchè quando ciò fosse eseguito come è richiesto, il problema risolvesi: 1.° moltiplicando il secondo pel terzo numero: 2.° un tal prodotto divideudosi pel primo numero; 3.° il quoto darà il quarto proporzionale cercato.

6.° Varî Problemi. 1.° Se 1732 pecore hanno fruttato cantaia 43 e rotoli 30 di cacio: 52 pecore, che appartenevano a Tizio, quanto hanno fruttato?

Soluzione, e intavolazione del Problema

$$\overset{\text{pec.}}{1732} : 52 :: \overset{\text{rot.}}{4330} : x.$$

Sicchè fatte le debite operazioni, sarà per conseguenza

$$x = \frac{4330.52}{1732} = 130.$$

cioè uguale ad 1 cant. e rot. 30.

7.° Problema 2.° Ridurre in piastre napolitane 215 franchi di moneta francese,

Soluzione, e intavolazione del Problema. Sapendosi che ogni piastra napolitana componesi di 5 franchi, si dirà

$$\overset{\text{franchi}}{5} : 215 :: \overset{\text{piastre}}{1} : x.$$

Sicchè sarà

$$x = \frac{215}{5} = 43^{p}.$$

---

(1) Tante volte un giovanetto crede che un problema appartiene a questa classe; ma intanto per circostanze a giovanetti non note esso non può essere esattamente risoluto. Se per es. vi si dice: « Da una gran vasca per un foro escono tre piedi cubici di acqua in due minuti; in quanto tempo uscirebbero 131 piedi cubici »? Questo problema non può essere esattamente risoluto colla presente regola; perchè l'acqua che esce, non è proporzionale al tempo: stante che l'esperienza fa vedere che l'acqua esce più velocemente sul principio che nel seguito. Per risolverlo dunque come conviene; bisogna mettere a calcolo le differenze delle velocità proporzionalmente ai tempi. In conseguenza appartiene ad altra classe di problemi, quantunque apparentemente credesi che appartenga alla regola del tre Semplice Diretta.

8.° *Corollario* 1.° Sicchè conoscendo il rapporto tra due monete, tra la francese e la napolitana, per esempio, basta dividere i franchi che sono dati pel termine del loro rapporto, il quoto esprimerà il termine in monete napolitane. Così nell' addotto esempio

$$\frac{215^f}{5^f} = 43^p.$$

9.° *Corollario* 2.° Se poi si volessero convertire le piastre napolitane in franchi francesi basta che il numero delle piastre sia moltiplicato pel termine del rapporto de' franchi. Così per esempio

$$57^p \times 5^f \ldots\ldots = 285^f$$

10.° *Corollario 3.°* Sicchè è facile convertire per esempio in moneta francese ogni altra somma di moneta, purchè sia noto il rapporto cha passa tra questa e l' altra nella quale si vuole che venga convertita.

Ogni ghinea inglese costa di 26^f, 47^c; si domanda dunque 17 ghinee quanti franchi darebbero?

Intavolazione del Problema

$$\overset{\text{ghinee}}{1 : 17} :: \overset{\text{franchi}}{26, 47 : x}.$$

Sicchè

$$x = \frac{26,47 \times 17}{1} = 449^f, 99^c$$

11.° Similmente ottengonsi tutte le riduzioni, ove le grandezze serbano questo procedimeuto di ragione.

12.° *Avvertimento.* Il Professore eserciti praticamente i giovanetti in problemi di siffatta specie.

13.° Problema 3.° Determinare il semestre di 3217 ducati al 5 per 100 ogni anno.

Intavolazione del Problema

$$\overset{\text{dan. impieg.}}{100 : 3217} :: \overset{\text{rend.}}{5 : x}.$$

Sarà, fatte le debite operazioni,

$$x = \frac{16085}{100} = 160, 85 \text{ annui}.$$

E perciò i sei mesi, ovvero la metà,

saranno $= 80,42\frac{1}{2}$.

14.° A questa classe di problemi anche appartengono quelli che appellansi *problemi* di *sconto*. Diamone un esempio. Caio dà a Tizio dugento ducati all'annuo interesse del 6 per 100: e nell'istesso tempo Tizio dà a Caio una casa per l'annuo fitto di ducati 42. Si domanda, quanto tempo debbe stare Caio nella casa di Tizio per iscontare i ducati 200, e gl'interessi successivamente aggiunti?

Intavolazione del Problema

$$\overset{\text{cap.}}{100} : 200 :: \overset{\text{int.}}{6} : x.$$

Dunque $$x = \frac{200 \times 6}{100} = 12.$$

Sicchè ai duc. 200 agg. 12 d'interesse: il capitale di Caio a capo dell'anno è ..... = 212
Da' quali tolti per l'affitto del 1.° anno duc..... 42
Resterà il capitale..... 170

Quindi si dirà di nuovo

$$\overset{\text{cap.}}{100} : 170 :: \overset{\text{int.}}{6} : x.$$

Sicchè sarà

$$x = \frac{170 \times 6}{100} = \frac{1020}{100} = \overset{\text{duc.}}{10}, \overset{\text{gr.}}{20}.$$

Li quali duc. 10 e gr. 20 aggiunti al capit. 170 danno la somma di..... 180,20
Da' quali tolti pel fitto del 2.° anno..... 42,00
Rimane il capitale..... 138:20

Quindi facciasi la nuova proporzione

$$\overset{\text{cap.}}{100} : 138,20 :: \overset{\text{int.}}{6} : x.$$

Onde sarà

$$x = \frac{829,20}{100} = 8, 29\frac{1}{5}.$$

Li quali $8,29\frac{1}{5}$ agg. al cap. 138:20 dà la somma. $146,49\frac{1}{5}$
Dai quali tolti pel fitto del 3.° anno..... 42,00

Rimane il capitale..... $104,49\frac{1}{5}$

Quindi istituiscasi la nuova proporzione

$$\overset{\text{cap.}}{100} : 104,49\tfrac{1}{5} :: \overset{\text{int.}}{6} : x.$$

Sicchè $$x = \frac{104,49\frac{1}{5} \times 6}{100} = \frac{626,95}{100} = 6,26.$$

Li quali aggiunti al capitale che rimaneva..... $104,49\frac{1}{5}$

Si ha la somma..... $110,75\frac{1}{5}$
Da' quali tolti pel fitto del 4.° anno..... 42,00

Rimane..... $68,75\frac{1}{5}$

Quindi istituiscasi la nuova proporzione

$$\overset{\text{cap.}}{100} : 68,75 :: \overset{\text{int.}}{6} : x.$$

Sicchè..... $$x = \frac{68,75 \times 6}{100} = 4,12$$

Li quali aggiunti al capitale che rimaneva..... 68,75
Si ha la somma..... 72,87
Da' quali tolti pel fitto del 5.° anno..... 42,00
Rimane il capitale..... 30,87

Sicchè vede ognuno che essendosi il capitale ridotto, cioè prossimo ad estinguersi, non è sufficiente per un'anno intero. Ond'è che bisogna cambiar proporzione e dire: se con 42 ducati si abita la casa un'anno intero, cioè 12 mesi; con ducati 30 e grana 87 quanti mesi dovrà essere abitata?

Fatta questa riflessione, dicasi

$$\overset{\text{danero}}{42} : 30,87 :: \overset{\text{tempo}}{12} : x.$$

E riducendo la moneta alla menoma specie, sarà

$$4200 : 3087 :: 12 : x.$$

Sicchè $$x = \frac{30^{c}7 \times 12}{4200} = \overset{\text{mesi}}{8}, \ \overset{\text{giorni}}{24},$$

con qualche frazione, della quale non si tiene conto.

Sicchè dopo 5 anni, 8 mesi, e 24 giorni si sono scontati i ducati 200, e la casa torna alla proprietà di Tizio.

15. *Avvertimento*. In molti problemi di commercio, che possono risolversi colla *regola* del tre, vi sono sovente metodi più brevi, co' quali si risolve il quesito più facilmente che colla *regola* stessa. Questi metodi o *regole* particolari si chiamano *pratiche;* perchè con queste regole si eseguisce più prontamente l' operazione proposta. Ricaviamo questo avvertimento dal Dizionario Enciclopedico de' signori Bossut e Lalande artic. Regola; per far vedere a giovanetti, che qualunque fosse la pratica di una quistione, la *regola*, essa è sempre il risultamento di queste dottrine. Sicchè l'Aritmetica è una; e non già, come il volgo pensa, l'Aritmetica scientifica essere diversa dall' Aritmetica pratica in quanto all'essenza, non già in quanto al metodo.

LEZIONE XXXIII.

De' Problemi che risolvonsi con la regola del tre Semplice-Inversa.

1.° Molti giovanetti non riescono così facilmente a risolvere i problemi della ragion Semplice-Inversa, come facilmente li vediamo riuscire nella soluzione di quistioni assai più difficili di quello che sono i problemi di questa classe. Tutta la difficoltà ha la sua origine, perchè i problemi della classe proposta nella presente Lezione, spesse fiate confondonsi con quelli della classe antecedente: onde poi deriva un risultamento tanto alieno dal vero, quanto che i termini *direttamente* proporzionali debbono essere proporzionali inversamente. Quindi è d'uopo di attenzione, perchè chiaramente i giovani conoscano in che i problemi di questa classe distinguonsi da quelli de' quali ci siamo nell' antecedente Lezione occupati.

2.° Da due sole facilissime riflessioni che potrà fare un giovanetto sopra un problema, che gli verrà proposto, potrà desumere, se il problema appartiene a questa classe, o no. E senza che abbadi a tutte due, sovente basta che faccia attenzione ad una sola di queste che noi verremo indicando, perchè facilmente giungerà ad assicurarsene della natura del problema detto di ragione Semplice-Inversa. E 1.° siccome noi

abbiamo chiamato problemi di semplice ragion diretta quelli, ne' quali la seconda quantità aumenta o decresce relativamente alla prima, come la quarta aumenta o decresce relativamente alla terza: così chiameremo problemi di semplice Ragione-Inversa quelli *ne' quali come la seconda quantità cresce* o *decresce relativamente alla prima, così la quarta decresce* o *cresce relativamente alla terza.* Dippiù se proponesi nella quistione qualche cosa diversa da' termini della proporzione, si ha un nuovo carattere per concludere che il problema appartiene alla classe, della quale ci proponiamo parlare (1). Rendiamo la cosa chiarissima con esempio molto alla mente de' giovanetti accomodato.

Un edifizio è stato fabbricato in 15 giorni da 8 uomini; se si avesse voluto fabbricare in giorni 30 (doppio di 15) avrebbe dovuto diminuirsi della metà il numero degli uomini: cioè sarebbero stati necessarî 4 uomini. Riflettete dunque 1.° che l'*edifizio* nell'addotto problema è cosa diversa de' termini della proporzione: 2.° e che la ragion del tempo impiegato è inversa di quella degli uomini adoperati. Il problema dunque porta tutti e due i caratteri già notati per essere ridotto alla classe proposta.

Difatti le ragioni date inversamente sono

$$\overset{\text{giorni}}{15 : 30} \;\text{«}\; \overset{\text{uomini}}{8 : x}.$$

Mentre dunque 30 è doppio di 15, debb'essere x metà di 8.

3.° Assicurato che siasi un giovane che un problema per questi caratteri appartiene a questa classe; non richiedesi molto ingegno, per risolvere qualunque problema di questo genere, che gli si propone. Poichè, invertendo i termini della prima ragione, i problemi della Semplice-Inversa saranno ridotti a problemi di ragion Semplice-Diretta. Così nell' addotto esempio dovendo

essere la ragion di	15 : 30
uguale alla ragion inversa di	8 : x.
Sarebbe la ragione di	30 : 15
uguale alla ragione di	8 : x.
Sicchè direbbesi	30 : 15 :: 8 : x.

E fatte le debite operazioni, sarà

$$x = \frac{15 \times 8}{30} = 4.$$

(1) Vedi il Paolino.

Onde vedesi che le ragioni di

$$15 : 30 \;»\; 8 : 4$$

sono tra loro inversamente uguali.

4.° Sicchè teniamo per fermo, che superata da principianti la difficoltà di caratterizzare il problema, come appartenente a quelli della classe di cui stiamo parlando, ogni soluzione di simili problemi rendesi facilissima. Poichè « 1.° *mettendo in primo luogo il termine della quistione che proponesi, cioè del quesito:* 2.° *il termine omogeneo;* 3.° *il rimanente:* 4.° *l'altro sarà determinato col trovare in ordine alle quantità così disposte il quarto proporzionale* ».

5.° *Avvertimento*. Da quello che abbiamo osservato nel paragrafo antecedente vedesi benissimo, perchè parecchi non prendono i problemi di questa classe in considerazione di problemi diversi da quelli della classe antecedente: mentre parecchi altri li separano, e formano una classe nuova. Noi pertanto abbiamo aderito a quest' ultima opinione, perchè ci pare che i giovanetti arrivano ad avere conoscenze esatte e distinte così dell'una, come dell'altra classe. Le divisioni portano confusione, sempre che sono ridondanti: ma quando esse sono richieste dalla natura dell' argomento che si sta trattando, riescono sempre non solo utili, ma necessarie.

6.° Varî Problemi spettanti alla classe della ragione Semplice-Inversa. Sopra una strada si desidera che sia levato un ponte; e si è calcolato che sarebbero necessarî per 8 giorni 20 operari al giorno: si ha premura vederlo levato in soli 2 giorni; quanti operarî si richiederebbero?

Già vede ognuno 1.° che tutta la quistione consiste nel determinare in 2 giorni quanti operarî sarebbero d'uopo; 2.° e che dovendo diminuire il tempo, bisogna che aumenti il numero degli operarî: ch'è quanto dire il problema componesi di due ragioni, una ch'è inversa dell'altra. Le ragioni sono

$$\overset{\text{giorni}}{8 : 2} \;«\; \overset{\text{operari}}{20 : x}.$$

Ed invertendo la prima ragione, sarà

$$2 : 8 :: 20 : x.$$

Sicchè $$x = \frac{20.8}{2} = \frac{160}{2} = 80.$$

Sicchè in due soli giorni bisognerebbe che fossero adoperati 80 operarî. E difatti le ragione di 8 : 2 è inversamente uguale all'altra di 20 : 80.

7.° Un Padre dispostosi a vestir la sua famiglia in tempo di primavera, con tessuti di tela larga 3 palmi ha avuto bisogno di canne $17\frac{1}{2}$: nella stagione d'inverno, volendo vestire la stessa famiglia con panno largo palmi 5, di quante canne farebbe d'uopo?

Anche in questo problema crescendo la larghezza del panno, debbe diminuire la lunghezza: val quanto dire, anche questo problema appartiene alla classe, della quale stiamo parlando. E le ragioni sono

$$\overset{\text{larghezza}}{3} : 5 \;\text{«}\; \overset{\text{lunghezza}}{17\tfrac{1}{2}} : x.$$

Ovvero $$5 : 3 :: 17\tfrac{1}{2} : x.$$

E riducendo a rotto l'intero e rotto, sarà

$$5 : 3 :: \frac{35}{2} : x.$$

Sicchè $$x = \frac{35}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{105}{10} = 10\frac{1}{2}.$$

Dunque si richiedono canne $10\frac{1}{2}$, dieci e mezzo, per vestire quella famiglia, che già con panno largo 3 palmi richiedevansi canne $17\frac{1}{2}$.

8. In virtù di questi principii, e di queste regole rendesi facilissimo ad un giovanetto, risolvere tutt'i problemi che riguardano la conversione delle moggia antiche in moggia legali, e di queste in quelle. Difatti ogni moggio antico è uguale a 4,84 di moggio legale. E perciò 1.° le moggia antiche riduconsi a moggia legali moltiplicando le moggia antiche per 4,84; ovvero per $\frac{484}{100}$. 2.° E le moggia legali riduconsi alle antiche moltiplicando per $\frac{100}{484}$.

In generale se $a : n$ sono i termini dell'antico al moggio nuovo; se un determinato numero di moggia antiche A si vuole ridurre in moggia nuove x: la formula generale è $x = \frac{A.a}{n}$

E viceversa se le nuove si vogliono convertire in antiche, la formula generale è $x = \frac{N\,n}{a}$.

Imperciocchè il lato del moggio antico $= 30$ passi

ovvero..... $= 30 \times 7\frac{1}{3}$ palmo

ovvero..... $= 30 \times \frac{22}{3}$ palmo

ovvero..... $= 220$ palmi.
Onde..... $= (220)^2$ esprime il moggio.
Sicchè il moggio antico..... $= 48400$.
Ma il moggio legale..... $= 10000$.
Dunque l'uno sta all'altro..... $= 48400 : 10000 = 4,84 : 100$.

Per esempio 7 moggia antiche quante moggia legali formano? $4,84 : 100 \ll 7 : x$.

E invertendo $100 : 4,84 :: 7 : x$.

Sicchè $x = \frac{7 \cdot 4,84}{100} = 33\frac{22}{25}$.

9. Similmente essendo il palmo antico identico al palmo legale; la canna antica sta alla canna legale nella ragione di $4 : 5$, ovvero di $8 : 10$. Onde rendesi facilissimo convertire le canne antiche in nuove; e le nuove in canne antiche: come dicevamo della conversione delle moggia.

10. Tragghiamo dall'Aritmetica del Caravelli un Problema, che può essere a giovani di modello, specialmente nel convertire certe misure antiche in nuove, e certe misure nuove in antiche.

Il palmo antico di Palermo sta al palmo antico di Napoli nel rapporto di $1073 : 1200$. Se dunque sieno dati 1000 palmi palermitani, in quanti palmi napolitani sarebbero ridotti?

Perchè il palmo palermitano è minore del Napolitano, la stessa lunghezza di 1000 palmi data dovrà contenere più palmi palermitani, che Napolitani. Sicchè se cercansi i palmi Napolitani bisogna che 1000 si moltiplichi per 1073, e si divida pel termine che nella suindicata ragione esprime il palmo stesso Napolitano; cioè per 1200.

Ragione dell'uno all'altro palmo

palerm. nap.
1073 : 1200.

palerm.
Lunghezza data di palmi 1000.

nap.
Lunghezza cercata di palmi x.

Onde le ragioni sarebbero

$$1073 : 1200 \,»\, 1000 : x.$$

Sicchè $$1200 : 1073 :: 1000 : x.$$

Dunque $$x = \frac{1073.1000}{1200} = 894\frac{1}{6}.$$

11. Non soggiungiamo altri problemi perchè speriamo che la gioventù oltre che avesse già capito la natura di queste tali quistioni, non voglia poi mancare di zelo e di esercizio. Tutt' i casi particolari non sono che esemplificazioni della formula generale da noi statuita fin dal principio della presente Lezione.

LEZIONE XXXIV.

De' Problemi che risolvonsi con la composizione di più ragioni semplici, e dirette.

1.° Abbiamo altrove parlato della *ragion composta*; ma non è fuor di proposito ricordare che ella può derivare 1.° della moltiplicazione di tutt' i denominatori delle ragioni semplici già date; 2.° o dalla ragione del prodotto di tutti gli antecedenti al prodotto di tutt' i conseguenti delle medesime ragioni date. Noi preferiremo al primo quest' ultimo modo di comporre le ragioni.

2.° In virtù di questo principio è facile che un giovanetto si formi l' idea di un problema che appartiene alla classe di quelli, che chiamansi problemi di ragion composta. Imperocchè quando giunge da' dati del Problema a persuadersene 1.° che le ragioni date sono più di due: 2.° e che il prodotto degli antecedenti aumenta o diminuisce relativamente al prodotto de' conseguenti, come una terza quantità data aumenta o diminuisce relativamente alla quarta che si dimanda: egli ha tutto il criterio che richiedesi, per ridurre alla classe presente il problema speciale, che gli è dato per risolvere; e in conseguenza a vedere come anche questi riduconsi ai problemi della prima classe.

3.° Eccovene un' esempio. Se 100 ducati in 1 anno rendono ducati 6, ducati 300 in 4 anni, quanta rendita darebbero?

Già vedete che la prima somma di danaro è.....	100
La seconda poi è.....	300
Il primo tempo è.....	1
Il secondo tempo è.....	4
Il primo interesse è....	6
L'interesse cercato è.....	x

Il secondo interesse dunque che dimandasi, debbe aumentare relativamente all'interesse dato, tanto perchè è aumentata la somma, quanto perchè è aumentato il tempo.

Sicchè se si trovano i soli esponenti delle ragioni date, tratterebbesi che $\frac{1}{3}$ si dovrebbe moltiplicare per $\frac{1}{4}$, e poi istituire proporzione col 6, ch'è l'interesse.

Dunque $\left.\begin{matrix} 1 : 3 \\ 1 : 4 \end{matrix}\right\}$ moltipl.

darebbero nel prodotto la ragion composta di

$$1 : 12.$$

Sicchè $1 : 12 :: 6 : x.$

Dunque $x = 72$ interesse cercato.

Ma quando non si volesse adottare questo metodo, spieghiamo a giovinetti come dovrebbe adoprarsi dell'altro; cioè spartendo le ragioni, e trovando il prodotto degli antecedenti, e poi quello de' conseguenti.

Ragione prima del danaro.....	100 : 300
Ragione seconda del tempo.....	1 : 4
Componendo le ragioni.....	100 : 1200

Sicchè statuiscesi proporzione

$$100 : 1200 :: 6 : x.$$

Dunque $x = \frac{1200.6}{100} = \frac{7200}{100} = 72.$

4.° Se un Wagon sulla strada ferrata di Portici in 10 minuti trasporta 16 passaggieri: 40 Wagons sempre carichi nello spazio di 12 ore; camminando con doppia velocità quanti passeggieri porterebbero?

Il numero de' passeggieri, che dimandasi debbe aumentare per ragion de'Wagons, del tempo, e della velocità. Sicchè sarebbero

Le vetture..... = 1 : 40
Il tempo..... = 10 : 720
La velocità..... = 1 : 2

I passaggieri dati..... = 16
I passaggieri che cercansi. = x

Sicchè componendo le ragioni sarà:

$$1.10.1 : 40.720.2 :: 16 : x.$$

Ed eseguendo la moltiplicazione, sarà

$$10 : 57600 :: 16 : x.$$

Sicchè $$x = \frac{57600.16}{10} = 92160.$$

5.° Un capitale di 3517 ducati in 3 anni dà di rendita annua 932 ducati: Si dimanda, un' altro capitale di 5727 impiegato alla stessa ragione quanta rendita darebbe nel corso di anni 5?

Aumentando il tempo del secondo capitale, aumenta del pari la rendita annua; aumentando il capitale, anche parimenti debbe aumentare la rendita. Sicchè la rendita, che dimandasi, è nella ragion composta de' tempi, e de' capitali. Sicchè sieno

	1.°		2.°
Tempi.	3	:	5
	1.°		2.°
Capit.	3517	:	5727

Rendita data 932

Rendita cercata x.

Onde statuiscasi

$$3.3517 : 5.5727 :: 932 : x.$$

Ovvero $$10551 : 28635 :: 932 : x.$$

Sicchè $x = \frac{28635.932}{10551} = \frac{26687820}{10551}$.

Ed eseguita la divisione, sarà

$$x = \overset{\text{duc.}}{2529}, \overset{\text{gr.}}{41}.$$

LEZIONE XXXV.

De' Problemi che risolvonsi con la regola ch'è detta del Tre Composta - Inversa.

1.° Non pochi Trattatisti di Aritmetica tacciono affatto dei problemi che propriamente risolvonsi con la regola, che è denominata del Tre Composta - Inversa. Eglino dopo l'esperienza di reiterato insegnamento hanno trovato, che a giovani di prima istituzione rendesi pur troppo difficile aver chiara distintissima idea di Regola siffatta; e quasi poi impossibile ridurre ad essa tutte le particolari quistioni che si potrebbero proporre, ond'essere per loro mano risolute. Senza che individualmente vi parliamo di coloro i quali non ne hanno fatto neanche menzione, o di quelli altri che avrebbero potuto essere più chiari in un'argomento per sè stesso chiarissimo: sentite come sopra di tal proposito esprimesi il Padre Paolino delle Scuole Pie; il quale è meritamente tenuto per uno dei primi Trattatisti di Aritmetica de' tempi suoi: *Regulam inversam compositam ultro omittimus, quod tyrones haud parum soleat confundere, et in rebus geometricis, vel etiam in hominum commercio, vix unquam occurrat.* La qual cosa facciamo nota a voi altri giovanetti, non perchè vi sgomentiate alla proposta difficoltà, ma perchè più del solito poniate attenzione in un'argomento tanto chiaro e patente per sè, quanto utile e necessario per le scienze e pel commercio. E questo tanto più a voi conviene, in quanto che altri disperando del buon esito neanche hanno fatto a'loro alunni menzione: e noi fidati nel vostro talento abbiamo il diritto di sperare che non manderete a vôto le premure che ci prendevamo per voi. Analizziamo un problema, che per l'analisi verrà chiara distintissima l'idea di siffatta regola.

2.° Fingete dunque che vi sarà proposto il seguente problema: Se 8 artefici in 10 giorni hanno fatto un'opera di 1600 palmi: 4070 *palmi*, 13 *artefici in quanti giorni li farebbero?*

Disposizione delle ragioni.

artefici primi		artefici secondi
8	:	13
palmi primi		palmi secondi
1600	:	4070
tempo primo		tempo cercato
10	:	x

Analisi del Problema.

Studiando dunque il problema vedesi 1.° che tutta la quistione volgesi a determinare il valore della quantità ignota x. Il quale debb' essere maggiore di 10, perchè 4070 è maggiore di 1600; cioè il tempo cercato è nella ragion diretta dell' opera; più tempo, ove più è l' opera.

Continuando però a riflettere, vedesi 2.° che l' istesso valore di x dovrebbe essere minore di 10, perchè 13 è maggiore di 8: cioè il tempo cercato è minore del tempo dato, perchè aumentandosi gli artefici debbe diminuire il tempo, cioè il tempo cercato sta al tempo dato nell' inversa ragione degli artefici.

Onde concludesi che x debb' essere maggiore di 10 per lo verso dell' opera, e minore di 10 per lo verso degli artefici. Sicchè per togliere questa contradizione apparente, bisogna che sia determinato di quanto x nel tutto insieme sia nel tempo stesso o maggiore, o minore della quantità omogenea 10. Or a quest' ufficio adempie la composizione delle ragioni.

Intavolazione del Problema.

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Ragione invertita} & 13 \overset{\text{artefici}}{:} & 8 \\ \text{Ragione diretta} & 1600 \overset{\text{opera}}{:} & 4070 \end{array}\right\} :: 10 \overset{\text{tempo}}{:} x.$$

E componendo le ragioni,

Sarà $13.1600 : 8.4070 :: 10 : x.$

Sicchè $x = \frac{8.4070.10}{13.1600} = \overset{\text{giorni}}{15}, \overset{\text{ore}}{15}, 41'$ in circa.

3.° Or vediamo perchè così si debbe risolvere un tal problema. Assicurato che siasi un giovanetto della natura del Problema, bisogna che s' istruisca del modo che debbe tenere per risolverlo. E a questa nuova analisi tendono le considerazioni, alle quali volgiamo la mente. Prendiamo un' altro esempio. Se 3 uomini in 18 ora scavano un fossato di 36 palmi cubici. Se gli uomini fossero 9, un fossato di 72 palmi cubici in quanto tempo lo scaverebbero?

È chiaro, per quello che dicevamo altrove, che il tempo dato (18 ora) sta al tempo cercato (x) nella composta delle due ragioni date: cioè di quella degli uomini, e di quella delle opere. Onde per determinarla, bisogna che sia posta molta attenzione. Primieramente dicasi: *se 3 uomini scaverebbero un fossato di palmi 36 in 18 ora: 9 uomini in quante ore lo scaverebbero?*

E troverassi che la ragione degli uomini è inversa di quella de' tempi: perchè essendosi aumentato il numero degli uomini, debbe proporzionalmente diminuire la quantità del tempo. Onde rendesi manifesto che le due ragioni $\overset{\text{uomini}}{3 : 9} \,\text{»}\, \overset{\text{tempo}}{18 : x}$ sono inversamente uguali tra loro.

Ma è noto, che per pareggiar due ragioni di tal natura basta *invertire* i termini di quella ragione ove non trovasi l'ignota, che così le ragioni saranno *direttamente* uguali: Sicchè può dirsi

$$9 : 3 :: 18 : x.$$

E sarà $$x = \frac{3.18}{9} = \frac{54}{9} = 6.$$

Fatto sta però che il fossato non è già di 36 palmi, ma di palmi 72.

Quindi secondariamente soggiungasi: se 9 uomini in 6 ora hanno scavato un fossato di palmi 36: gli stessi 9 uomini un'altro fossato di palmi 72 in quanto tempo lo scaverebbero?

E qui la ragione è diretta; perchè crescendo l'opera debbe proporzionalmente aumentare la quantità del tempo. Sicchè può dirsi

$$\overset{\text{opera}}{36 : 72} :: \overset{\text{tempo}}{6 : x}$$

E troverassi $$x = \frac{72\ 6}{36} = \frac{432}{36} = 12.$$

Ecco terminata l'analisi, e fatto vedere già come in quest'altro problema la ragione delle quantità nota alla quantità ignota componesi di due ragioni una inversa dell'altra.

Standoci dunque all'analisi rigorosa, che abbiamo fatto della già proposta quistione, può facilmente ognuno notare che 9 (uomini), e 36 (opera) sono divisori; e tutte le altre quantità poi sono elementi di un prodotto che fa da dividendo. Sicchè tutta la quistione può essere espressa per la seguente formula di ragion composta

$$\overset{\text{uomini}}{9 : 3} \times \overset{\text{opera}}{36 : 72} :: \overset{\text{tempo}}{18 : x}.$$

E componendo le ragioni: sarà

$$9.36 : 3.72 :: 18 : x$$

Sicchè $$x = \frac{3.72.18}{9.36} = 12.$$

Onde è facile il conoscere che disposto il problema del seguente modo

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{\text{uomini}}{3 : 9} \\ \overset{\text{palmi}}{36 : 72} \end{array} \right.$$
$$\overset{\text{tempo}}{18 : x}$$

si è poi intavolato di quest'altro modo

ragioni semplici che si debbono comporre $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\text{uomini}}{9 : 3} \\ \overset{\text{palmi}}{36 : 72} \end{array} \right.$

$$\overset{\text{tempo}}{18 : x}.$$

Dal che è poi nato che

$$9.36 : 3.72 :: 18 : x.$$

E perciò $$x = \frac{3.72.18}{9.36} = 12.$$

4.° Dalle quali considerazioni ci vediamo autorizzati a statuire la seguente verità: la quale vogliamo che i giovanetti imprimano fortemente nell'animo: *Il conseguente della ragione inversa multiplicato per l'antecedente dell'altra ragione sta all'antecedente di quella multiplicato pel conseguente di questa, come l'altra quantità data alla quarta proporzionale che si va cercando.*

5.° E perchè le verità Matematiche sono necessarie, e si può da una sola concludere a tutte le altre verità simili: perciò dalla ispezione analitica fatta sull'antecedente problema possiamo formare il seguente canone generale: In tutt'i problemi ne'quali entrano due ragioni per composizione, ed è una inversa dell'altra, 1.° si notino le tre quantità eterogenee che comprendono la prima parte del problema, cioè il dato: 2.° si notino le altre tre quantità eterogenee, che terminano la seconda parte del problema. 3.° Si pongano le ragioni risultanti da queste quantità: 4.° S'invertano i termini della ragione che trovasi inversa; siffatta ragione si pianti in primo luogo.

Questa ispezione unita alla regola da noi nel n.° antecedente statuita darà sufficiente criterio per conoscere in siffatti problemi quali sieno le quantità che debbonsi multiplicare, quali quelle che debbonsi dividere, quale finalmente il quoto, ovvero il risultamento finale del Problema.

6. È vero che tante volte il modo di proporre il problema, ovvero il perturbamento delle quantità che entrano nelle quistioni suol recare confusione ai novizî della scienza: ma da questa confusione può toglierli la meditazione sulle quantità medesime, onde accomodino i termini, che taluno avesse potuto confusamente proporre. L'analisi è madre di ordine, e di verità.

7.° Veniamo alla pratica della dottrina da noi stabilita. Per mietere in 7 giorni un campo di 20 moggia, richiedonsi 12 mietitori *(ecco la prima parte del problema)*: Per mietere in 3 giorni un campo di 100 moggia quanti mietitori richiederebbonsi? *(ecco la seconda parte del problema)*. Si dispongano dunque come segue.

giorni mog. miet.
7, 20, 12 (le tre quantità eterogenee della 1.ª parte).

giorni mog. miet.
3, 100, x (le tre quantità eterogenee della 2.ª parte).

Quindi istituiscansi le seguenti

Ragioni semplici $\left\{ \begin{array}{c} \text{giorni} \\ 7 : 3 \\ \text{moggia} \\ 20 : 100 \\ \text{mietitori} \\ 12 : x. \end{array} \right.$

I mietitori 12 dunque stanno a'mietitori cercati x 1.° nell'inversa de'giorni; perchè ove son *meno* i giorni voglionsi

più mietitori: 2.° nella diretta delle moggia; perchè ove le moggia son *più*, anche *più* debbono essere i mietitori.

Dunque nella ragione inversa, ch' è quella de' giorni 7 : 3, passi l' antecedente in conseguente, e viceversa.

E si compongano le ragioni

$$\begin{cases} 3 : 7 \\ 20 : 100. \end{cases}$$

$$12 : x$$

E dicasi $3.20 : 7.100 :: 12 : x.$

Sicchè $x = \frac{7.100.12}{3.20} = 140.$

8.° Soggiungiamo qui un' altro problema. Il Direttore di un' Ospizio con ducati 92 e carlini 7 ha dato alimento a 25 convittori per giorni 19: *quanti giorni sarebbe bastata* per 57 alunni la somma di ducati 317 e carlini 3?

Intavolazione del Problema.

Dan. 1.°	convittori primi	giorni primi	
92,7	25	19	DATO le tre prime quantità eterogenee.
Dan. 2.°	convitt. secondi	tempo cercato	
317,3	57	x	QUESITO le tre altre quantità eterogenee

Disposizione delle ragioni.

danaro
92,7 : 317,3
convittori
25 : 57
giorni
19 : x

Osservazione.

Il tempo dato (19 giorni) sta al tempo cercato (x) 1.° nella diretta del danaro; perchè a più danaro corrisponde proporzionalmente più tempo: 2.° nell' inversa de' convittori; perchè a più convittori corrisponde proporzionalmente meno di tempo.

Sicchè invertendo i termini della ragione, ch' è quella de' convittori, e piantatala in 1.° luogo.

$$\overset{\text{convitt.}}{57} : 25 \; \overset{\text{danaro}}{92{,}7} : 317{,}3 :: \overset{\text{tempo}}{19} : x.$$

E componendo le ragioni

$$57 \cdot 92{,}7 : 25 \cdot 317{,}3 :: 19 : x.$$

Sicchè $$x = \frac{25 \cdot 317{,}3 \cdot 19}{57 \cdot 92{,}7}$$

Ed eseguite tutte le opportune operazioni;

Sarà $$x = \frac{150717{,}5}{5283{,}9} = \frac{1507175}{52839} = \overset{\text{giorni}}{28}, \overset{\text{ora}}{12} \frac{10028}{17613}$$

9.ª Aggiungiamo un'altro problema. All'altezza di 20 tese levasi un grave dopo 10 giorni, fatigandovi 7 uomini: *Se si volesse elevare all' altezza di 25 tese in 12 giorni, quanti uomini si richiederebbero?*

tese	giorni	uomini	
20	10	7	} Le tre prime quantità del *dato.*
tese	giorni	uomini	
25	12	x	} Le tre quantità del *quesito.*

Ed anche questo problema appartiene alla classe, della quale parliamo.

Sicchè
$$\overset{\text{tese}}{20 : 25}$$
$$\overset{\text{giorni}}{10 : 12}$$
$$\overset{\text{uomini}}{7 : x.}$$

Gli uomini dati (7) stanno agli uomini cercati (x) nella diretta delle tese; perchè a più tese corrispondono più uomini; e nell' inversa de' giorni; perchè a più giorni corrispondono meno uomini.

Sicchè ordinando le ragioni, e posta l' inversa in primo luogo.

Sarà $$12 : 10 \cdot 20 : 25 :: 7 : x.$$

E componendo le ragioni,

Sarà $$12 \cdot 20 : 10 \cdot 25 :: 7 : x.$$

Onde $x = \frac{10\ 25 \cdot 7}{12 \cdot 20} = \frac{1750}{240} = 7\frac{7}{24}$ della giornata di un'uomo.

LEZIONE XXXVI.

1.° Molti problemi che seguiranno, perchè si dicano scientificamente risoluti, e non già praticamente, hanno bisogno di una verità fondamentale, da cui tutta ripetono la forza della loro dimostrazione. Quindi noi non ostante che stessimo nella pratica delle quistioni Aritmetiche, e delle ragioni e proporzioni abbiamo già altrove parlato: vediamo come indispensabile piantare quì a proposito una tal verità, affinchè quanto più prossima si trovi al luogo di essere opportunamente applicata, tanto più i giovani sentano l'influenza delle generali sulle dottrine particolari. Ecco perchè soggiungiamo il seguente

Lemma.

2.° Dividere un numero in tre parti tali, che abbiano tra di esse certe date ragioni.

Per esempio: Dividere 14358 in tre parti che stiano tra di esse come i numeri 1, 2, 3. Cioè che la seconda sia doppia, e la terza tripla della prima.

Soluzione e Dimostrazione.

Sieno P', P'', P''' le parti cercate;

Cioè $\begin{cases} P' : P'' :: 1 : 2 \\ P' : P''' :: 2 : 3. \end{cases}$

Permutando le sudette ragioni

Saranno $\begin{cases} P' : 1 :: P'' : 2 \\ P' : 1 :: P''' : 3. \end{cases}$

Sicchè $P' : 1 = P'' : 2 = P''' : 3.$

Ma nelle ragioni uguali la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti come un' antecedente al suo conseguente. Dunque

$$P' + P'' + P''' : 1 + 2 + 3 :: P' : 1 :: P'' : 2 :: P''' : 3.$$

Ed invertendo

Saranno
$$\begin{cases} 1+2+3 : P' + P'' + P''' :: 1 : P' \\ 1+2+3 : P' + P'' + P''' :: 2 : P'' \\ 1+2+3 : P' + P'' + P''' :: 3 : P''' . \end{cases}$$

Or ad $1+2+3$ sostituendo 6,

Ed a $P' + P'' + P'''$ sostituendo 14358

Saranno
$$\begin{cases} 6 : 14358 :: 1 : P' \text{ (parte prima)} \\ 6 : 14358 :: 2 : P'' \text{ (parte seconda)} \\ 6 : 14358 :: 3 : P''' \text{ (parte terza)}. \end{cases}$$

Sicchè
$$\begin{cases} P' = \frac{14358.1}{6} = 2393 \\ P'' = \frac{14358.2}{6} = 4786 \\ P''' = \frac{14358.3}{6} = 7179 \end{cases}$$

In tutto la somma. $= 14358$.

3.° Dalla quale soluzione è facile ricavare una formula generalissima per la soluzione di problemi analoghi.
Poichè se

$p' + p'' + p'''$ dinoterauno i numeri delle ragioni
$P' + P'' + P'''$ dinoteranno le parti del numero dato
s..... dinoterà la somma di $p' + p'' + p'''$
S..... dinoterà la somma di $P' + P'' + P'''$.

Si avrà
$$s : S :: p' : P'$$
$$s : S :: p'' : P''$$
$$s : S :: p''' : P'''$$

4.° Difatti applichiamo queste formule al seguente problema. Dividere il numero 108 in tre parti che abbiano tra di esse le ragioni de' numeri 1, 3, 5.

Saranno
$$\begin{cases} s = 9 \\ S = 108 \\ p' = 1 \\ p'' = 3 \\ p''' = 5 \end{cases}$$

Secondo la formula

$$s : S :: p' : P' \text{, ovvero } 9 : 108 :: 1 : P'$$
$$s : S :: p'' : P'' \ldots\ldots\ 9 : 108 :: 3 : P''$$
$$s : S :: p''' : P''' \ldots\ldots\ 9 : 108 :: 5 : P'''.$$

$$P' = \frac{108.1}{9} = 12$$

Sicchè
$$P'' = \frac{108.3}{9} = \frac{324}{9} = 36$$
$$P''' = \frac{108.5}{9} = \frac{540}{9} = 60.$$

Difatti $12 + 36 + 60 = 108.$

E le parti 12, 36, 60
hanno ragioni ordinate co' numeri 1, 3, 5.

5.° Quì il professore potrà tenere esercitati i giovani nelle soluzioni di problemi anologhi, adoperandosi che i giovani applicassero ai casi particolari la formula generale or ora stabilita.

LEZIONE XXXVII.

De' Problemi che risolvonsi con la Regola detta propriamente di Società.

1.° I problemi di quest'altra classe sono di facilissima esecuzione. Perchè tutta la quistione volgesi a dividere proporzionalmente a certe somme impiegate per certi tempi anche dati o il guadagno, o la perdita che da diversi socî si sono fatti. Dunque in siffatte soluzioni domina generalmente il principio della ragion diretta, o *semplice*, o *composta*. Poichè ci vuol molto poco ad intendere 1.° che spetta più di frutto

a chi ha impiegato più di capitale; 2.° e che cresce puranche la ragion dell' utile a misura che aumenta il tempo del danaro messo in commercio. Nissuna classe di problemi dunque pare più facile di questa; quantunque in nissun'altra hanno luogo operazioni aritmetiche più lunghe. Incominciamo da un' esempio facilissimo, perchè in tal modo giungeremo sicuramente non solo a formarci un' idea chiara e distinta di siffatti problemi; ma bensì conoscere dove sta di casa la loro dimostrazione.

2.° Se per esempio tre giovanetti A, B, C hanno formato una società, a condizione che hanno posto

$$A = 5$$
$$B = 3$$
$$C = 2$$

cioè $$S = 10.$$

Supponendo che siensi guadagnati ducati 20, come debbesi distribuire un tal guadagno?

Analisi e Soluzione del Problema.

Ognuno già vede, come essendo diverse le somme del denaro impiegato, e nissuna differenza di tempo per essere messa a calcolo, che diversa pure e proporzionale ad esse debbe farsi la distribuzione. Dunque tutto il capitale sta a tutto il guadagno, come il capitale individuo all' individuo guadagno.

Dalla qual considerazione è facile dedurre come derivino le seguenti analogie.

Som. tot.		Guad. tot.		Som. parz.		Guad. parz.
10	:	20	::	5	:	A
10	:	20	::	3	:	B
10	:	20	::	2	:	C.

Sicchè
$$\begin{cases} A = \dfrac{20.5}{10} = 10 \\ B = \dfrac{20.3}{10} = 6 \\ C = \dfrac{20.2}{10} = 4 \end{cases}$$

Nella regola di Società dunque, sempre e quando non entra in considerazione circostanza di tempo, *trovandosi il quarto proporzionale in ordine alla somma de' Capitali, al guadagno o perdita totale, alla somma individua del socio, si conoscerà il guadagno o la perdita di questo Socio.*

3.° L'analisi del problema antecedente ci autorizza a statuire una formula generale per la soluzione di tutt'i problemi che spettano a questa classe. Poichè si dinoteranno con S la somma totale, con s la parziale, con G il guadagno totale, con g il guadagno parziale.

Sarà $S : s :: G : g$, ovvero $S : G :: s : g$.

4.° Applichiamo questa formula a un problema particolare. Quattro socî A, B, C, D hanno fatto la società di 13000 ducati, e si sono messi

$$\text{da} \quad \begin{cases} A = 5000 \\ B = 4000 \\ C = 3000 \\ D = 1000 \end{cases}$$

essendosi guadagnati 1700 ducati a capo di quattro anni, qual'è il guadagno di ciascuno in particolare?

Soluzione.

A tal problema applicate lo formula generale, che immantinenti conseguirete la soluzione: la formula è

$$S : s :: G : g.$$

$$\text{Dunque} \quad \left\{ \begin{array}{l} 13000 : 5000 :: 1700 : A \\ 13000 : 4000 :: 1700 : B \\ 13000 : 3000 :: 1700 : C \\ 13000 : 1000 :: 1700 : D \end{array} \right\} \text{guadagni parziali.}$$

Dal che vedesi facilissimo, che il guadagno di ognuno trovasi quarto proporzionale in ordine a quantità date.

$$\text{E perciò il guadagno di} \begin{cases} A = \dfrac{1700 \cdot 5000}{13000} \\ B = \dfrac{1700 \cdot 4000}{13000} \\ C = \dfrac{1700 \cdot 3000}{13000} \\ D = \dfrac{1700 \cdot 1000}{13000}. \end{cases}$$

5.° Vediamo adesso quando in questi problemi entra a calcolo il tempo. In tali casi l' utile è nella ragion composta del danaro impiegato e del tempo: val quanto dire che il danaro d' ogni individuo debbe multiplicarsi pel tempo ch' è stato impiegato. Sicchè eseguite le multiplicazioni d' ogni somma, e trovata la somma totale di siffatti prodotti: come sta una tal somma ad ogni prodotto parziale; così starà il guadagno totale al guadagno parziale. Sicchè se con T dinoteranno la somma de' prodotti, con s la somma parziale e con t anche il tempo parziale, con G il guadagno totale, con g il guadagno parziale, la formula antecedente sarà convertita in quest' altra

$$T : s.t :: G : g.$$

La quale formula soddisfa alla soluzione di tutt' i problemi che spettano alla classe della quale stiamo trattando.

Sicchè se s', s'', s''', s'''' dinotano somme particolari.
E t', t'', t''', t'''' i rispettivi tempi: ottenuti i prodotti d' ogni somma pel rispettivo tempo, e trovatane la somma totale, che dinotiamo con T

$$\text{Saranno} \begin{cases} T : s' . t' :: G : g' \\ T : s'' . t'' :: G : g'' \\ T : s''' . t''' :: G : g''' \\ T : s'''' . t'''' :: G : g'''' \end{cases}$$

6.° Diamo un problema accomodato a qneste ultime formule. Tre persone A, B, C fanno società tra loro, e già mettono tutti insieme ducati 7535 per 16 mesi. A mette ducati 4000 per tutto questo tempo, B ducati 3000 per soli mesi 9, e C ducati 535 per mesi 7. Essendosi guadagnati 1700 ducati, quale è l'utile che spetta a ciascuno?

Soci	Capitali	Tempi
A.	$4000 = s'$	$16 = t'$
B.	$3000 = s''$	$9 = t''$
C.	$535 = s'''$	$7 = t'''$.

Moltiplicando ogni capitale pel tempo.

Saranno $\begin{cases} 4000 . 16 = 64000 \\ 3000 . \ 9 = 27000 \\ 535 . \ 7 = \ 3745 \end{cases}$

Sarà la somma de' prodotti ..... $= 94745 = T$.

Sicchè $\begin{cases} 94745 : 64000 :: 1700 : A \\ 94745 : 27000 :: 1700 : B \\ 94745 : 3745 :: 1700 : C. \end{cases}$

Onde $\begin{cases} A = \dfrac{64000 . 1700}{94745} = \\ B = \dfrac{27000 . 1700}{94745} = \\ C = \dfrac{3745 . 1700}{94745} = . \end{cases}$

LEZIONE XXXVIII.

De' Problemi che risolvonsi con la Regola del Falso, ovvero Regola di Posizione.

1.° Passiamo all'esame di un'altra regola; la quale è comunemente detta regola di *Falsa posizione*. Ella ha preso una tal denominazione; perchè *per via di posizioni in certo modo arbitrarie (false) giungesi a dividere un numero dato in certe parti proporzionali a tali altri numeri anche dati secondo una determinata quistione*. Come quando per esempio cercasi dividere l'eredità A nelle parti x, y, z; in modo che y sia il triplo di x, e z il quintuplo di y: ch' è quanto dire proporzionalmente a' numeri 1, 3, 15.

2.° Il principio fondamentale di questa regola dunque è: » dividere un numero dato in parti proporzionali a numeri dati » In conseguenza quì non fà d' uopo tener presente, se non quello che sopra di ciò dicevamo nella lez. Antecedente. La qual cosa darà ragione di tutt'i Problemi che seguiranno. Perchè ove si fosse capito un tal principio, e mettasi in opera la formula generale in quella lezione già statuita sarà facilissima la soluzione d' ogni problema che conformemente a ciò che con la regola che esaminiamo potrà essere proposto.

3.° Questa regola dividesi in *Falso semplice*, e *Falso doppio*. Or appartengono alla prima tutte quelle quistioni, nelle quali un numero dato debbe dividersi assolutamente, e senza altre condizioni in parti proporzionali a numeri anche dati. Per riportarci all'esempio generale recato di sopra, richiederebbesi dividere l'eredità di 13523 ducati proporzionalmente ai numeri 1, 3, 15: cioè in tre parti tali, che la seconda sia tripla della prima, e la terza quintupla della seconda. In questo, e in ogni altro problema simile « si suppongano numeri che soddisfano alle condizioni del Problema; e per maggior facilità di calcolo si proponga che sia 1 la prima parte, sarà 3 la seconda, e 15 la terza. Quindi trovisi la somma

loro ch' è 19, e applichisi la formula $s : p' :: S : P'$. Cioè

$$19 : 1 :: 13523 : x \text{ (prima parte)}$$
$$19 : 3 :: 13523 : y \text{ (seconda parte)}$$
$$19 : 15 :: 13523 : z \text{ (terza parte)}$$

$$x = \frac{13523.1}{19} = \frac{13523}{19} = 711{,}73 \ \frac{13}{19} \text{ (a)}$$

$$y = \frac{13523.3}{19} = \frac{40569}{19} = 2135{,}21 \ \frac{1}{19}$$

$$z = \frac{13523.15}{19} = \frac{202845}{19} = 10676{,}05 \ \frac{5}{19}$$

Di fatti la somma loro è $= 13523, 00$

4.° E lo stesso avverrebbe, se in vece di essere noto il tutto fosse nota una sola sua parte. Per esempio se si dicesse: qual è quel numero da cui tolto il terzo, e la metà darebbe 5 per residuo?

Suppongasi che un tal numero sia 24. Dal quale tolti 8 (terzo), e 12 (metà) avrebbesi 4 per residuo. Dunque dicasi

$$4 : 24 :: 5 : x$$

Sarà $$x = \frac{24.5}{4} = \frac{120}{4} = 30$$

5.° Apparterrebbero alla seconda classe, cioè del *Falso doppio*, tutte quelle quistioni, nelle quali dovendo dividere un numero in parti proporzionali a numeri anche dati, richiedesi inoltre che le parti abbiano aggiunte certe condizioni. Per esempio dividere 86 in due parti tali che la seconda abbia il triplo della prima, e ducati 6 dippiù (b)

(a) In questi problemi basta trovare il primo quoto; perchè multiplicandolo per 3 si otterrebbe la seconda parte; e multiplicandolo per 15 otterrebbesi la terza.

(b) Togliamo questo criterio dall' Aritmetica del Paolino. Il quale sopra tal proposito così esprimesi: « *Iudicium autem quando quaestio proposita solvi non possit per unam positionem, sed duplicem omnino requirat, et cum quaestioni aliquis determinatus numerus additus est, qui una cum numero ad libitum posito debet assumi. Scol. Prop. VIII. Cap. IV.* Nè altrimenti esprimesi il Bossut nell' Aritmetica. Paris MDCCLXXXI. e nel Dizionario Enciclop. Artic. Falso. La qual cosa come non sia sempre vera, lo mostrano le osservazioni che si potrebbero fare nelle soluzioni de' problemi, che anderemo ad eseguire.

Queste tali quistioni anche risolvonsi pari a quelle della prima Classe. Poichè, se i ducati 6 tolgansi avanti parte, allora tratterebbesi dividere il numero 80 in due parti tali che la seconda sia tripla della prima.

Sicchè supponendo 1 la prima parte
Sarà poi..... 3 la seconda
E la somma loro $= \overline{4}$

$$\text{Onde}\left\{\begin{array}{l} 4 : 1 :: 80 : P' \text{ (parte prima)} \\ 4 : 3 :: 80 : P'' \text{ (parte secouda)} \end{array}\right.$$

E perciò $P' = \frac{80}{4} = 20$

In conseguenza $P'' = .. 60 + 6$

6.° Vi è un' esercito di 2100 soldati tra Inglesi, Francesi, Spagnuoli, Italiani. I Francesi sono due volte gl' Inglesi e 10 di più: gli Spagnoli sono la metà de' Francesi e 20 di più: gl' Italiani sono il triplo degli Spagnoli e 5 di meno. Quanti sono i soldati delle diverse nazioni di questo esercito?

		numeri aggiunti
Se supponiamo gl' Inglesi	= 1	
Saranno i Francesi	= 2+	..... (10)
gli Spagnoli	= 1+	(5)+(20)=.... 25
gl' Italiani	= 3+	(15)+(60)−(5)=70
Sarà la somma =	7	105

Sicchè da 2100 avanti parte
tolti..... 105, tratterebbesi
il residuo 1995 dividere proporzionalmente ai numeri 1, 2, 1, 3=7 (somma)

Sicchè
7 : 1995 :: 1 : I (Inglesi)
7 : 1995 :: 2 : F (Francesi)
7 : 1995 :: 1 : S (Spagnoli)
7 : 1995 :: 3 : It (Italiani)

Onde fatte le debite operazioni

Sarebbero	gl' Inglesi	= 285	
	i Francesi	= 570+	10
	gl' Spagnoli	= 285+	25
	gl' Italiani	= 855+	70

E sommando tutto insieme = 2100

7.° Sicchè comunque fosse dato un Problema ridotto a condizione che un numero dato debbe dividersi proporzionalmente a parti anche date: si pongano numeri falsi che sembrano soddisfare alle condizioni del Problema, e si trovi la loro somma che chiameremo *F*: chiamando pure *f* ogni parte falsa supposta: *V* il numero vero dato, si otterrà *v* cioè la parte vera proporzionale Sicchè per tutti questi problemi può statuirsi la seguente formula generale.

somma de' falsi	particolare falso	somma vera	particolare vero
F :	f ::	V :	v

8.° Applicazione di questa formula a varî problemi particolari ecc. ecc.

Tre Persone A, B, C hanno giuocato al lotto, e hanno guadagnato 300 ducati. B deve avere il doppio di A, e ducati 6 di più. C debbe avere una somma pari a quella di A, e B, e ducati *10* di più. Si domanda quali sieno queste parti.

	numeri variabili	numeri invariabili del Problema
Suppongasi.....	A = 1	
Sarà.....	B = 2+	6
Sarà.....	C = 3+	16
Saranno le somme loro	6	22

Or da..... 300
Tolto avanti parte..... 22
Resterà..... 278

Sicchè

$$6 : 1 :: 278 : A$$
$$6 : 2 :: 278 : B$$
$$6 : 3 :: 278 : C$$

$$A = \frac{278.1}{6} = 46\frac{1}{3}$$
$$B = \frac{278.2}{6} = 92\frac{2}{3} + \Big\} 6$$
$$C = \frac{278.3}{6} = 139 + \Big\} 16$$

Di fatti..... $46\frac{1}{3}$

$+ 92\frac{2}{3}$

$+139$

$+ 06$

$+ 16$

dânno la somma 300

9. Vi sono però certi problemi che assolutamente risolvonsi con *due false posizioni*. E di questi ci siamo proposti da ultimo parlare in questa lezione.

Uno disse: la mia età, più la mia età, più il quarto della mia età, più $\frac{1}{2}$ fanno 50. Qual'è questa età?

Suppongasi 1.° che l'età fosse 16. Avrebbesi 16

16

4

$\frac{1}{2}$

In tutto.... $36\frac{1}{2}$

Doveva essere 50

Dunque si è avuta la

Differenza 1.ª in — $= 13\frac{1}{2}$

Suppongasi 2.° che l'età fosse 20. Avrebbesi 20

20

5

$\frac{1}{2}$

In tutto ..... $45\frac{1}{2}$

Doveva essere..... 50

Si ha dunque la 2.ª differenza in—= $4\frac{1}{2}$

Sicchè la differenza di queste differenze = ... 9

Or moltiplicato il falso 1.ª per la 2.° differenza. Cioè $16.4\frac{1}{2} = 72$

E molt. il 2.° falso per la 1.ª differenza. Cioè $20.13\frac{1}{2} = 270$

Sarà la differenza de' prodotti ..... = 198

la differenza de' prodotti divisa per la differenza delle differenze darà il numero cercato. Sarà $\frac{198}{9} = 22$

1.° Lo stesso avverrebbe se le differenze invece di essere in— fossero in +. Per esempio. Un Collegio ha tanti convittori, che, il terzo, il quarto, e il quinto, più 7 fanno 54: qual'è il numero di siffatti convittori?

Suppongasi 1.° il numero falso 120. Avrebbesi 40
30
24
7

In tutto 101

Dovevano essere 54

Vi è dunque in + la differenza 1.ª = 47

Suppongasi 2.° l'altro numero falso 90. Avrebbesi 30
$22\frac{1}{2}$
18
7

In tutto ..... $77\frac{1}{2}$

Doveva essere 54

Vi è dunque anche in + la differenza 2.ª = $23\frac{1}{2}$

Sarà la differenza di queste due differenze.. = $23\frac{1}{2}$

Moltiplicando il 1.° falso per la 2.ª diff. Cioè $120.23\frac{1}{2} = 2820$

Moltiplicando il 2.° falso per la 1.ª diff. Cioè $90.47 = 4230$

Sarà la differenza di tali prodotti ..... = 1410

Or il quoto della differenza de' prodotti per la differenza delle differenze trovate dà il numero cercato. Cioè $\frac{1410}{23\frac{1}{2}} = 60$

11.° Quindi è facile ricavare la seguente regola. Sempre che un problema risolvesi col falso doppio; 1.° Si supponga un numero qualunque, e con esso si immagini soddisfare alle condizioni del problema; notando la differenza tra il risultato del numero falso, e quello ch' è incluso nel problema. 2.° S'immaginerà un altro numero, e anche con esso s'immagini soddisfare alle condizioni del problema; notando anche la differenza tra il risultato del secondo falso, e quello ch' è incluso nel problema. 3.° Si noti la differenza di queste due differenze, purchè o tutte e due eccedono, o tutte e due difettano dal numero determinato nel problema. 4.° Il primo falso si moltiplichi per la seconda differenza, e il secondo falso per la prima; e notisi la differenza di tali prodotti. 5.° Tal differenza di prodotti divisa per la differenza delle differenze già trovate darà il numero vero che si andava cercando.

12.° Bisogna però avvertire che se una differenza eccede, e l'altra difetta; allora la somma de' prodotti dovrà essere divisa per la somma delle differenze già determinate.

Ecco un' esempio: « Qual è quel numero di scolari, la cui terza, e quarta parte aggiunte a 15 fanno 29?

Sia il falso 1.° = 12. Sarà 4

		3
		15
In tutto	=	22
Doveva essere	=	29
Differenza 1.ª	= —	7

Sia il falso 2.° il numero 60	Sarà	20
		15
		15
In tutto	=	50
Doveva essere	=	29
Differenza 2.ª	=	+ 21
Sicchè		7 + 21 = 28

Or $12 \cdot 21 = 252$
$60 \cdot 7 = 420$

Sarà la somma $= 672$

Sicchè $\frac{672}{28} = 24$. E questo è il numero.

Di fatti $\frac{24}{3} + \frac{24}{4} + 15 = 8 + 6 + 15 = 29$

LEZIONE XXXIX.

De' Problemi che risolvonsi con la Regola detta di Alligazione, o di mistura.

1.° Dicesi alligazione, o mistura quando compongonsi in un volume, o in una massa vari metalli, vari liquidi, varie cose di diverso valore: sicchè quello che nasce abbia un valore medio tra l'infimo e il sommo delle cose separatamente considerate. Come quando per esempio mescolandosi vini di diverso valore, cercasi il valore della miscela che si è fatta, relativamente a una data misura; o quando conoscendo il valor particolare de' vini, e volendosi una misura di prezzo medio, determinasi quanto debbe mescolarsi d'infimo e di buono vino.

2.° Questa regola dunque è applicabile a due ricerche. La prima è, quando conosciuto il valor particolare delle cose, e conosciuto puranco il numero, cercasi con ciò determinare il valor medio dell' alligazione se sono metalli, o della miscela, se sono liquidi. La seconda è, quando vuolsi conoscere il numero delle parti che debbonsi alligare, o mescolare, sempre che conoscesi il valore di ciascuna parte, e quello dell'alligazione, o mescolanza. Noi prima parleremo de' problemi della prima specie; e quindi ci proveremo dir qualche parola de' problemi appartenenti alla seconda specie. La quale va suscettibile a diverse osservazioni, a misura che entreranno in composizione, o due, o più di due componenti.

3.° Diamo un problema appartenente alla prima specie. Un negoziante ha tre specie di vini: e propriamente ha 300 barili, ognuno di 25 carlini; 200 altri barili, ognuno di

carlini 20; e 150 di carlini 15 ognuno. Volendoli mescolare, desiderasi sapere qual è il valore d'ogni barile di questa miscela.

In questo, e in ogni altro problema 1.° il numero de'barili particolari moltiplichisi pel rispettivo valore, e si trovi la somma di tutt'i prodotti. 2.° Trovisi la somma de' barili, ovvero delle cose alligate, o mescolate; 3.° la somma de' prodotti dividasi per quella de' barili, o delle cose. 4.° Il quoto darà il valore d'un barile di mescolanza: come quì appresso vedesi praticamente eseguito.

barili	valore
300	25
200	20
150	15

Sarà la somma = 650

Saranno i prodotti $\begin{cases} 300 . 25 = 7500 \\ 200 \ 20 = 4000 \\ 150 . 15 = 2250 \end{cases}$

E perciò la somma = 13750

Onde il valor di ogni barile di mescolanza di siffatti è

$$= \frac{13750}{650} \left\} \begin{matrix} \text{somma de' prodotti} \\ \text{somma de' barili} \end{matrix} \right. = 21 \frac{2}{13} = \overset{\text{carl.}}{1}, \ \overset{\text{gr.}}{5}, \ \overset{\text{calli}}{4}.$$

Non soggiungiamo altri problemi di questa specie, perchè il problema già recato può essere di norma a tutti gli altri simili.

4.° Passiamo ai problemi della seconda specie. Incominciamo a supporre che vuolsi con un prezzo medio sapere quanto debbe prendersi di una, e quanto dell'altra per formare una unità corrispondente al prezzo medio ch'è noto, parimenti che noti sono e l'alto, e l'infimo prezzo.

I. Si scrivano dunque l'alto e il prezzo infimo verticalmente uno sotto dell'altro, e a sinistra scrivasi il prezzo medio.

II. Trovisi la differenza dell'alto sopra del medio, e notisi a dritta dell'infimo; quindi la differenza dell'infimo col medio, e notisi a destra dell'alto.

III. Trovisi la somma di siffatte differenze.

IV. Si formino due rotti, i cui numeratori sono le differenze trovate, e il denominatore la somma di siffatte differenze. Questi due rotti indicheranno le parti che debbonsi prendere dell'alto e dell'infimo per formare una unità che abbia il medio valore.

Ecco un esempio. Tizio ha vino del valore di carlini 20 il barile, e vino di carlini 8. Vuolsi un barile del valore di carlini 16: questo debbe esser mescolato di vino buono, e d' infimo?

vino buooo 20
vioo medio 16
vino infimo 8

8 differenza dell' infimo dal medio

4 differenza del buono del medio

12 somma delle differenze

Sicchè $\frac{8}{12}$, ovvero $\frac{2}{3}$ debbono essere di buono

E $\frac{4}{12}$, ovvero $\frac{1}{3}$ di barile debb' essere d' infimo.

5.° Ecco un' altro problema. Ad un' Orefice fu data incombenza di fare una corona di oro. Cadde in sospetto di frode, cioè di aver all' oro alligato anche dell' argento. Si pensò scovrirla, e determinarla. Come si è potuto giungere a tanto?

Si sono fatte 1.° due corone simili alla già fatta, una di oro puro, e l' altra anche di puro argento. 2.° Si sono pesate, e si è trovato già che la corona di oro puro, quella già fatta dall' orefice, e l' altra di argento puro aveva in quanto al peso la ragione de' numeri 19, 15, 10.

Quindi non solo che dalla diversità de' pesi conobbesi la frode, ma si è giunto pure a determinarla, cioè quanto di argento erasi mescolato all' oro. Ed ecco come

Peso della corona d' oro 19
Peso della corona fatta dall' orefice 15
Peso della corona d' argento 10

differenza della mista dall' argento 5

diff. di quella d' oro dalla mista 4

9 somma delle differenze

Sicchè si concluse che $\frac{5}{9}$ erano di oro

E che ..... $\frac{4}{9}$ erano di argento.

6.° Vediamo adesso come di questa regola debbe farsi uso, quando si facesse alligazione, o mistura di più di due cose. Purchè in siffatti problemi

I. Si situino i valori diversi verticalmente uno sotto l'altro, e a sinistra mettasi il valore dell'alligazione, o della mistura ch'è dato.

II. Il primo è l'ultimo de' valori verticalmente situati paragoninsi con quello dell'alligazione; e le differenze mettansi reciprocamente a lato de' valori verticalmente situati. Quindi si paragonino il primo e il penultimo; e anche le loro differenze si situino reciprocamente a diritta de' numeri verticali. E lo stesso si faccia finchè tutti i numeri verticali a due a due si paragonino con quello ch'è posto alla sinistra. Purchè però uno sia maggiore, e l'altro minore di quello che è situato a sinistra: altrimenti le differenze a lato del primo notinsi col segno —.

III. E siccome il numero situato nel primo luogo della serie verticale entra in tutt'i paragoni, si trovi la somma di tutte le differenze situate sulla sua diritta, sottraendo se mai si trovassero differenze negative dalla somma delle positive.

IV. Siffatta somma sarà il denominatore di tanti rotti, i cui numeratori sono le differenze speciali notate a diritta de' numeri verticali.

Problema. Il vino del Monte vale 38 carlini il barile, quello di Calabria 24, e quello di Marano 12 si vuole un barile con carlini 18: quanto debbe prendersi dell'uno, dell'altro, e dell'altro?

vini diversi		somma delle differenze spettanti a 38
	M = 38	6 6 = 12
mistura 18	C = 24	
	Mar = 12	
		diff. di 38, e 12 da 18 . . . . .
		diff. di 38, e 24 da 18 . . . . .
		20 . . . . .
		20 . . . . .

La somma delle differenze = 52.

Onde i rotti $\left\{ \begin{array}{l} \frac{12}{52}, \text{ ovvero } \frac{3}{13} \text{ sono di vino del Monte} \\ \frac{20}{52}, \text{ ovvero } \frac{5}{13} \text{ sono di vino di Calabria} \\ \frac{20}{52}, \text{ ovvero } \frac{5}{13} \text{ sono di vino di Marano} \end{array} \right.$

7. Tante volte però avviene qualche differenza negativa, perchè un numero maggiore debbesi sottrarre da un numero minore. In tal caso, come dicevamo, nel sommare le differenze situate alla diritta di un numero della serie verticale, si abbia conto di questo numero negativo; purchè nella contrazione risulta un residuo positivo, altrimenti i rotti non adempieranno alla soluzione; e quindi si operi come nel problema antecedente.

Diamo un esempio.

Un negoziante ha cinque qualità di vini s, t, v, x, y i quali valgono rispettivamente grana 21, 16, 9, 6, 2 per ogni caraffa. Si vuole una caraffa di gr. 13: in che ragione debbono essere mescolati?

	Prezzi diversi	— differenze speciali	— diff. contratte
Prezzo del vino misto 13	21	11, 7, 4 — 3 =	11, 7, 1 = 19
	16	8	 8
	9	8	 8
	6	8	 8
	2	8	 8
		Somma delle differenze =	 51

Dunque le ragioni saranno rispettivamente $\left\{ \begin{array}{l} \frac{19}{51} \\ \frac{8}{51} \\ \frac{8}{51} \\ \frac{8}{51} \\ \frac{8}{51} \end{array} \right.$

Or se fate diversi paragoni 1.° non solo che avrete rotti diversi da quelli che avete avuto; ma 2.° tante volte v'imbatterete in paragoni, che vi menano in una soluzione assurda. L'intelligenza del primo di questi due casi è facilissima, e mostra che le combinazioni possono essere diverse a misura de' paragoni che si fanno. Perciò diamo esempio che menerebbe a una soluzione impossibile.

Riportiamoci all' esempio recato, paragonando il 9 con gli altri numeri.

	Differenze speciali		Differenze contratte
	21	4	4
	16	4	4
13}	9	8, 3 — 7 11	—7
	6	4	4
	2	4	4

Nella contrazione essendosi trovata una quantità negativa, ch' è — 7, è chiaro segno che invece di sommare le differenze, secondo che richiede la miscela proposta, dovrebbe sottrarsi. Ciocchè manifestamente è assurdo.

FINE.

606080

SGN

INDICE.

Lezione.....	I.	*Nozioni preliminari*..... pag.	1
Lezione.....	II.	*Operazioni fondamentali de' numeri interi*.....	8
Lezione.....	III.	*Continuazione*.....	11
Lezione.....	IV.	*De' Rotti*.....	18
Lezione.....	V.	*Continuazione su i Rotti*.....	23
Lezione.....	VI.	*Continuazione su i Rotti*.....	26
Lezione.....	VII.	*Continuazione su i Rotti*.....	30
Lezione.....	VIII.	*Continuazione su i Rotti*.....	32
Lezione.....	IX.	*Delle Frazioni Decimali*.....	37
Lezione.....	X.	*Continuazione*.....	42
Lezioni.	XI. XII. (*)	*De' Denominati*.....	47
Lezione....	XIII.	*Sistema metrico Francese*.....	54
Lezione....	XIV.	*Continuazione sulla Dottrina de' Denominati*.....	57
Lezione.....	XV.	*Continuazione sulla Dottrina de' Denominati*.....	60
Lezione....	XVI.	*Delle Potenze*.....	65
Lezione....	XVII.	*Continuazione*.....	69
Lezione...	XVIII.	*Estrazione della Radice Quadrata*.	73
Lezione.....	XIX.	*Estrazione della radice cubica*.....	75
Lezione.....	XX.	*Delle ragioni, e proporzioni in generale*.....	77
Lezione....	XXI.	*Delle proporzioni geometriche*.....	82
Lezione....	XXII.	*Delle proporzioni Aritmetiche*.....	87
Lezione...	XXIII.	*Continuazione*.....	89
Lezione...	XXIV.	*Delle progressioni Geometriche*....	111
Lezione....	XXV.	*Delle progressioni Aritmetiche*.....	117
Lezione ..	XXVI.	*De' Logaritmi*.....	120
Lezione..	XXVII.	*Continuazione su i logaritmi*.	129
Lezione.	XXVIII.	*Continuazione su i logaritmi*.....	133
Lezione...	XXIX.	*Continuazione su i logaritmi*.....	139
Lezione....	XXX.	*Continuazione su logaritimi*.....	142

(*) Essendosi fatto errore nella numerazione di questa Lezione, il Quadro Sinottico ch'è a pagina 49 potrà essere sostituito per la Lezione XII.

LEZIONE... XXXI. *Osservazioni necessarie per la Soluzione de' Problemi*..... 145
LEZIONE... XXXII. *Soluzione de' Problemi, e primieramente di quelli che diconsi di ragione Semplice-Diretta*..... 154
LEZIONE. XXXIII. *De' Problemi che risolvonsi con la regola del tre Semplice-Inversa*.. 160
LEZIONE.. XXXIV. *De' Problemi che risolvonsi con la composizione di più ragioni semplici, e dirette*..... 165
LEZIONE.. XXXV. *De' Problemi che risolvonsi con la regola ch' è detta del tre Composta - Inversa*..... 168
LEZIONE.. XXXVI. *Lemma*..... 175
LEZIONE. XXXVII. *De' Problemi che risolvonsi con la regola detta propriamente di Società*. 177
LEZIONE. XXXVIII. *De' Problemi che risolvonsi con la regola del Falso, ovvero regola di posizione*..... 182
LEZIONE. XXXIX. *De' Problemi che risolvonsi con la regola detta di alligazione, o di mistura*..... 189

SBN 606680

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA